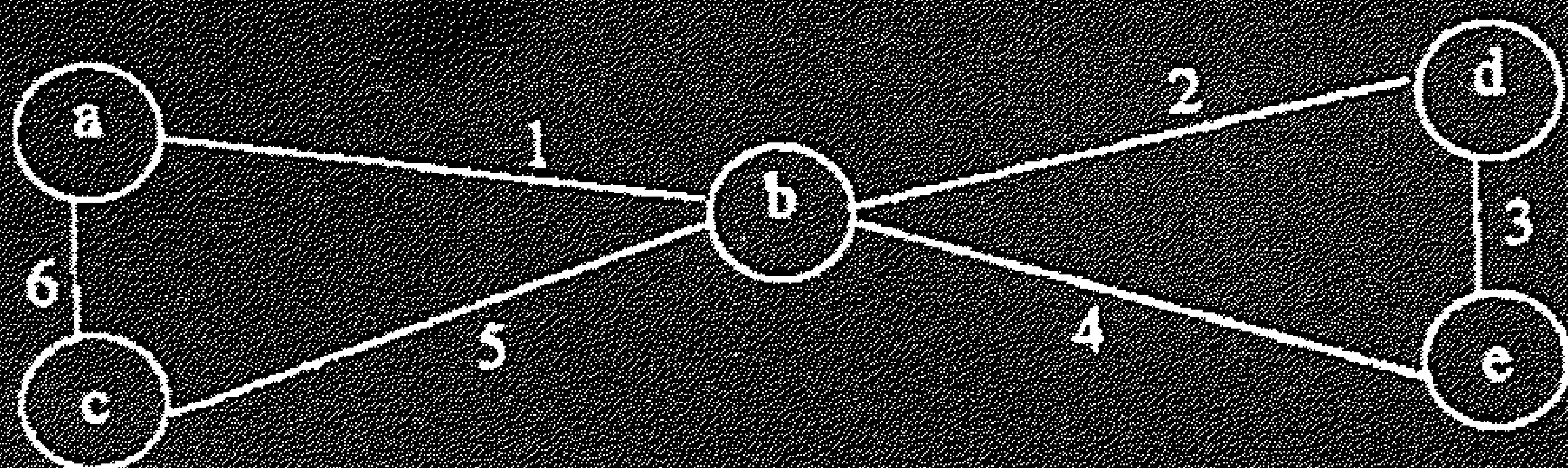
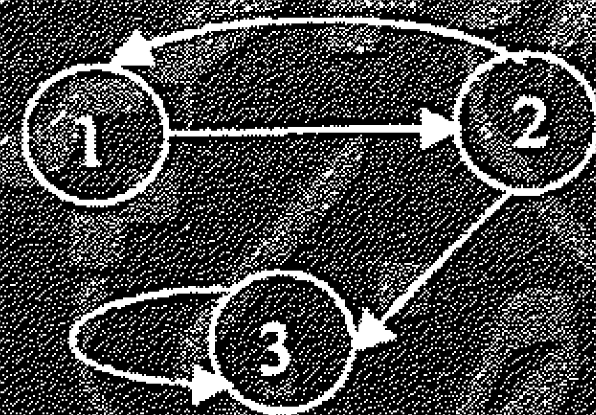
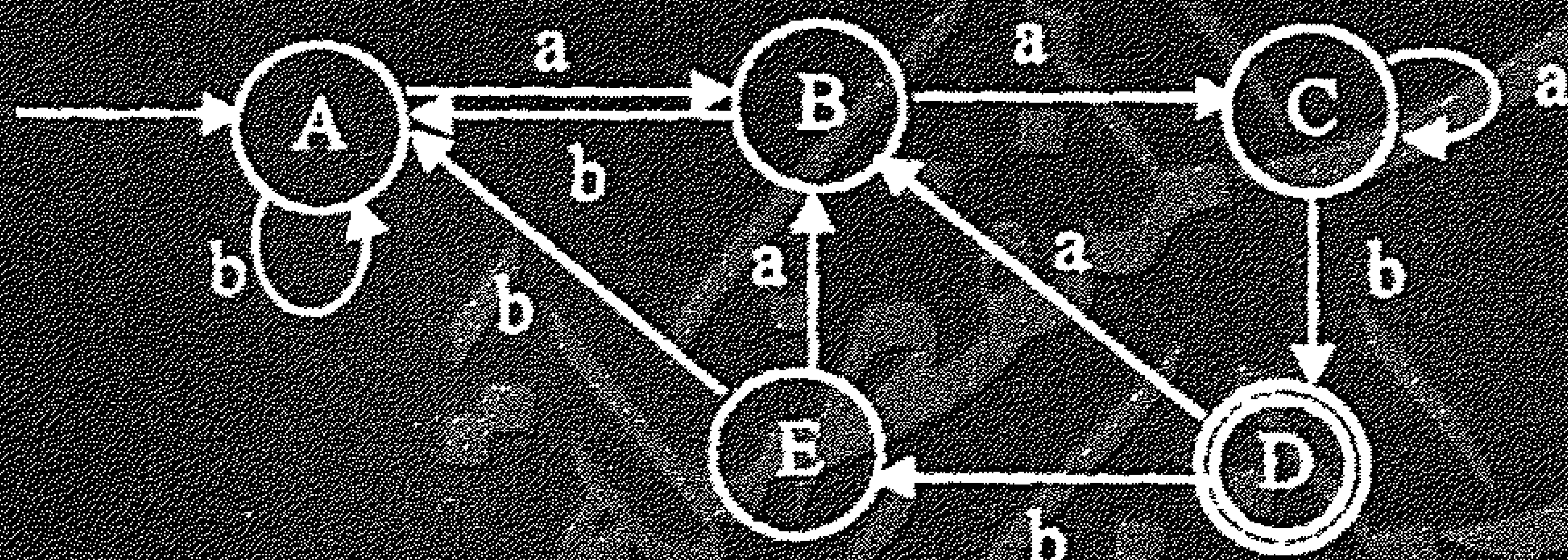
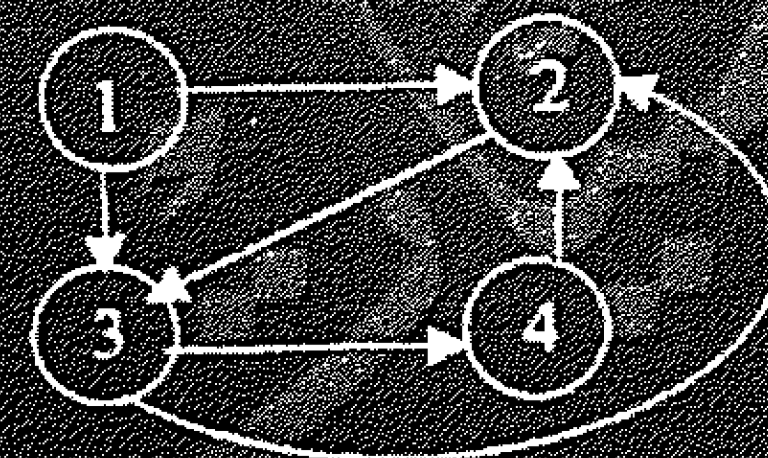
الدكتور سليم شفيق الأشهب

مدخل الى
الرياضيات المنفصلة



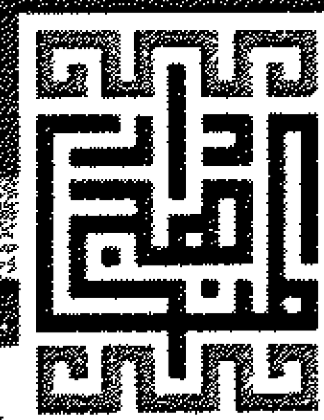


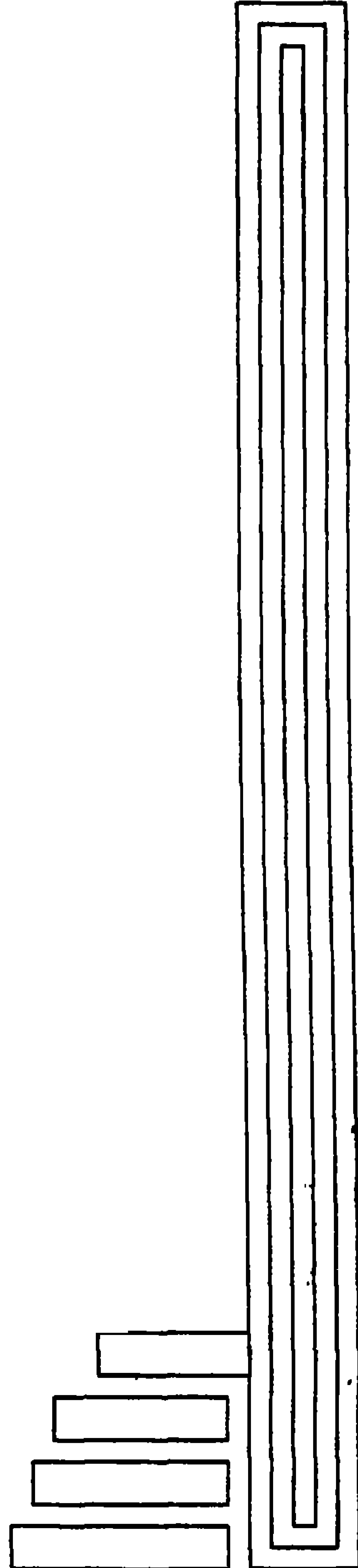




$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

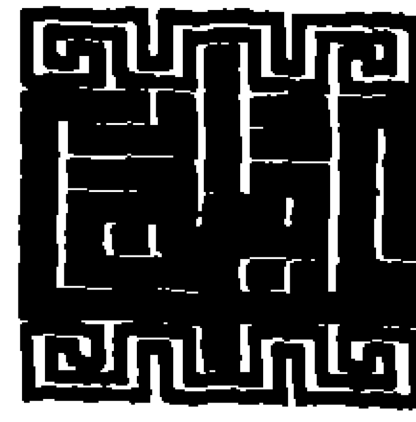
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$





مدخل إلى الرياضيات المنفصلة

بسم الله الرحمن الرحيم



دار المناهج للنشر والتوزيع

الطبعة الأولى

١٤٢٢ هـ - ٢٠٠٢ م

رقم الإجازة المتسلسل لدى دائرة المطبوعات والنشر ٢٠٨٥ /٢٠٠١/١٠

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبات والوثائق الوطنية ٢٢٠٨ /٢٠٠١/١٠

عمان - الوحدة - شارع الملك حسين - بناية الشركة المتحدة للتأمين

هاتف ٤٦٥٠٦٢٤ فاكس (٠٠٩٦٢٦) ٤٦٥٠٦٢٤

ص.ب - ٢١٥٣٠٨ عمان ١١١٢٢ الأردن

مدخل إلى
الرياضيات المنفصلة

تأليف

الدكتور سليم شفيق الأشهب



إهداء

أهدي جهدي هذا

إلى

الراحل العزيز والدي

رحمه الله وأسكنه فسيح جناته

المحتويات

الباب الرابع

الأشجار

الباب الخامس

اللغات

مُقَدِّمَة

يأتي هذا الكتاب كخلاصة لخبرة تدريسية تزيد عن خمس سنوات في موضوع الرياضيات المنفصلة. حاولت في هذا الكتاب إعطاء المادة بشكل مبسط والتركيز على بعض النقاط التي يستصعبها الطلبة. كما حاولت الابتعاد من الخوض بتفصيل في المواضع التي تبدو بديهية أو تجر المرء إلى جدل فلسفي.

تنحو بعض الكتب التعليمية إلى تقليص الحجم المتاح لشرح المادة على حساب الحجم المتاح للتمارين والمسائل. لقد حاولت فعل الأمر المعاكس لعدم قناعتي بالأسلوب الشائع. لقد حاولت عدم الخوض في الإثباتات الرياضية لأن هذا الكتاب يستهدف فئة واسعة من الطلبة ولا أريده أن يقتصر فقط على طلبة الرياضيات.

لقد استعنت أثناء تدريس المادة بالعديد من الكتب الرياضية ولكن لم أحاول ترجمة فقرات من هنا وهناك. بل حاولت صهر جميع الأفكار داخل ذهني، وإعطاء المادة بلغتي الخاصة. أثناء هذه العملية كنت أحياناً أقوم بتطوير وابتكار طرقي الخاصة حيث أرجو أن أكون موفقاً في جعل المادة تبدو أسلس.

أود أن أشكر في هذا المقام كل من ساهم وساعد في إنجاز هذا العمل وأن يجزيه الله خير الجزاء عن عمله.

أرجو في الختام أن يجد كل قارئ بعض المتعة في قراءة الكتاب، كما وأن يشعر كل قارئ بنوع من أنواع الفائدة جناها بعد تصفحه لأوراق هذا الكتاب.

والله من وراء القصد

عنوان المؤلف

عمان: ١١١٩٥ ص.ب ١٧٠٨- الأردن

Saleem_Al_Ashhab @hotmail.com

الباب الأول
المنطق

الفصل الأول
الفرضيات وعمليات على الفرضيات

سندرس في هذا الفصل المنطق الرياضي وليس المنطق بالمعنى الشائع للكلمة. والمنطق الرياضي يتعامل مع العبارات الرياضية، ويحاول تبيان كيفية دمجها معاً للخروج بعبارات رياضية جديدة مكونة من العبارات الأولية أو الأساسية.

يتم تعريف العبارة الرياضية الأولية على أنها جملة مفيدة ذات معنى تستخدم في كتابتها الرموز الرياضية. مثلاً، الجملة التالية:

$$2 + 3 = 5$$

هي عبارة رياضية أولية. هاك أمثلة أخرى على عبارات رياضية:

$$2^2 + 3^2 = 13, 6\text{-}5 > 7\text{-}8 , 4 * (5 - 6/3) \leq 10$$

إن العبارة الأخيرة تحمل معناً ليس صحيحاً من ناحية رياضية لأن الطرف اليسار قيمته ١٢، ولذا لن يكون أقل أو يساوي الطرف اليمين. في هذه الحالة ستكون العبارة الأخيرة عبارة خاطئة ويقال أن قيمتها المنطقية خطأ. لاحظ أن العبارتين الأولى والثانية كانتا صحيحتان. يقال في هذه الحالة أن القيمة المنطقية لكلٍ منهما صحيح، فهما عبارتان صحيحتان من ناحية المضمون.

يتضح مما سبق أن العبارة الرياضية الأولية تكون لها دائماً إحدى القيمتين من ناحية منطقية إما خطأ أو صحيح، والحكم بذلك يعود إلى الفهم العادي لفحوى

العبارة. عند دمج العبارات الأولية بطرق منطقية نتعرف عليها لاحقاً ستتكون عبارات رياضية معقدة يتم الحكم على قيمتها المنطقية صحيح أم خطأ حسب طبيعة الدمج وحسب قيمة كل عبارة على حدة.

تدعى العبارات الأولية في المنطق فرضيات، وتوجد عدة عمليات منطقية تجري على الفرضيات. أبسط هذه العمليات هي عملية نفي الفرضية أي إعطاءها المعنى المعاكس. نستخدم للنفي في الرموز الرياضية عادة إشارة قطعة مستقيمة مائلة، مثلاً العبارة

$$2 + 3 = 5$$

تصبح بعد النفي العبارة

$$2 + 3 \neq 5$$

وتقرأ لا تساوي. لكن، توجد بعض الاستثناءات. مثلاً. العبارة التالية

$$6 - 5 > 7 - 8$$

تصبح بعد نفيها

$$6 - 5 \leq 7 - 8$$

إن النفي هنا يعطي الحالة المتممة للحالة المنفية حيث أن مقارنة اليسار مع اليمين لها ثلاثة احتمالات: إما تساوي اليسار مع اليمين أو اليسار أكبر من اليمين أو اليسار أصغر من اليمين. نفي أحد الاحتمالات يعطي عبارة تحتوي على الاحتمالين الباقيين. أحياناً يستخدم الرمز $<>$ كبديل عن $\neq$ أي نفي العبارة

$$2 + 3 \ =5$$

يكتب على الصورة

$$2 + 3 <> 5$$

تماشياً مع مبدأ إعطاء الاحتمالين الباقيين عند النفي.

لو دققنا النظر في الفرضيات الأصلية والمنفية من ناحية القيم المنطقية لكل منها للاحظنا أن: الفرضية الصحيحة تصبح بعد النفي فرضية خاطئة والفرضية الخاطئة تصبح بعد النفي فرضية صحيحة. هذا المبدأ يتماشى مع المنطق العادي الذي يقول أن

المعنى والمعنى المعاكس بكون أحدهما صائب والآخر خاطئ. يتم التعبير عن هذا الفهم من خلال الرموز الرياضية برسم الجدول التالي:

p	$\bar{p}$
T	F
F	T

ترمز هنا p إلى الفرضية و $\bar{p}$ إلى نفي الفرضية p، بينما ترمز T إلى القيمة المنطقية صحيح و F إلى القيمة المنطقية خطأ. يسمى هذا الجدول جدول الصواب والخطأ ويتم فيه تبيان ماذا يحدث للفرضيات عند أخذها لجميع القيم المنطقية الممكنة بعد إجراء العملية المنطقية.

العمليات المنطقية التي تجري على فرضيتين عديدة. سنبدأ بدراسة أولى هذه العملية وهي عملية العطف بحرف الواو في اللغة. إذ كان لدينا الفرضيتان:

$$2 + 3 = 5\ ,\ \ 2 + 3 = 6$$

فإن دمجهما سيكون الفرضية المركبة التالية:

$$2 + 3 = 5 \quad \text{and} \quad 2 + 3 = 6$$

كما في اللغة تعني عملية العطف هنا بأن العبارة تحتوي على معلومات مختلفة وتعطى جميعاً للشخص كعبارة واحدة. إن وجود خطأ في أي معلومة واردة ضمن عبارة مركبة بعملية عطف سيجعل العبارة ككل خاطئة، وهذا ما يحدث في المنطق الرياضي. إذ لا يمكن قبول العبارة السابقة كفرضية صحيحة لأن الشق الثاني فيها خطأ. لقبول عبارة تحتوي على حرف واو لا بد أن يكونا شقيها الاثنين صحيحين، وإلا تعتبر العبارة خاطئة. يتم تمثيل هذا المفهوم في جدول صواب وخطأ كالتالي:

$p \ q$	$p \wedge q$
T T	T
T F	F
F T	F
F F	F

رمزنا هنا إلى الفرضية الأولى بالرمز p وللفرضية الثانية بالرمز q. يوجد ٤ احتمالات لإعطاء الثنائي p و q قيماً منطقية لأنهما مستقلتان وكل فرضية لها احتمالان من ناحية القيمة المنطقية . لاحظ أننا استخدمنا رمز ∧ للدلالة على عملية العطف بحرف واو. عملية العطف الأخرى في اللغة باستخدام حرف أو يرمز إليها بالرمز ∨. لو كتبنا العبارة السابقة باستخدام عملية أو لحصنا على الفرضية المركبة:

$$2+3=5 \quad \text{or} \quad 2+3=6$$

والتي أصبحت الآن فرضية صحيحة. السبب في ذلك أن عملية أو تتيح للشخص الحرية في إيجاد المعلومة الصحيحة التي يريدها من بين معلومتين. لكن، يوجد فرق بين المفهوم اللغوي والمنطقي لعملية أو. فهي في المنطق قد تدمج فرضيتين صحيحتين وتبقى الفرضية المركبة صحيحة لأن المعلومة الصحيحة تكون موحودة في الشق الأول والثاني من الفرضية المركبة. بمعنى آخر إن فرضية مركبة باستخدام أو لا تكون خطأ سوى في حالة واحدة وهي عندما تكون كلتا المعلومتان الواردتان في تركيب الفرضية خطأ. لذلك يكون جدول عملية أو كالتالي:

p q	p∨q
T T	T
T F	T
F T	T
F F	F

توجد عملية منطقية تعبر عن ضرورة كون أحد العبارتين المندمجتين بعملية أو فقط صحيحة بينما الأخرى خاطئة. اسم هذه العملية أو الحصرية ويرمز لها بالرمز exor حيث أتى الاختصار ex من الكلمة الإنجليزية exclusive والتي تعني حصري، بمعنى أن أو الحصرية تحصر صحة المعلومة في أحد شقي الفرضية المركبة. بهذا الفهم نحصل على الجدول التالي:

p q	p exor q
T T	F
T F	T
F T	T
F F	F

العملية المنطقية الرابعة هي عملية الاستنباط ورمزها →. إن لهذه العملية استخدام آخر كإشارة رياضية داخل عبارة رياضية أولية، مثلاً:

$$x = 2 \rightarrow x^2 = 4$$

معنى هذه العبارة أنه لو كان العدد المجهول x يساوي 2 لوجب أن يكون تربيعه x^2 يساوي 4. العبارة هي بمثابة فرضية صحيحة عادية. ولو درسنا الفرضية

$$x^2 = 4 \rightarrow x = 2$$

لاكتشفنا بأنها فرضية خاطئة لأن كون تربيع العدد المجهول 4 لا يعني بالضرورة كون هذا العدد فقط 2 وإنما قد يكون هذا العدد 2-. إذاً، لتصحيح العارة السابقة نكتبها على الصورة

$$x^2 = 4 \rightarrow x = 2, -2$$

نعود لاستخدام عملية الاستنباط في تكوين فرضيات مركبة من فرضيات عادية لنأخذ المثال التالي:

$$2 + 3 = 5 \rightarrow 2 + 3 + 1 = 5 + 1$$

تعبر هذه الفرضية المركبة عن الفكرة الرياضية أن إضافة واحد لطرفين متساويين لا يؤثر على النتيجة. هذا مبدأ رياضي صحيح لا غبار عليه. لذلك عند تطبيق هذا المبدأ على فرضية صحيحة وهي

$$2 + 3 = 5$$

تنتج فرضية صحيحة أخرى وهي

$$2 + 3 + 1 = 5 + 1$$

والفرضية المركبة ككل فرضية صحيحة. لو طبقنا المبدأ السابق على الفرضية الخاطئة

$$2 + 4 = 7$$

لنتجت الفرضية المركبة

$$2 + 4 = 7 \rightarrow 2 + 4 + 1 = 7 + 1$$

بالرغم من أن الفرضية الأولى والفرضية الثانية داخل الفرضية المركبة خطأ إلا أننا سنعتبر الفرضية المركبة ككل صحيحة. قد يبدو هذا الكلام للوهلة الأولى كلاماً غريباً، لكن في واقع الأمر إن عملية الاستنباط تمت باستخدام مبدأ صحيح. والمنطق يقول أن من يبدأ بكلام خاطئ ويستنتج أو يستنبط منه كلام جديد بطرق صحيحة يصل إلى كلام خاطئ، لأن الصحيح يؤدي إلى الصحيح والخاطئ إلى الخاطئ إذا كانت عملية التسلسل سليمة. أي أننا في عملية الاستنباط ننظر إلى آلية العمل وليس إلى النتيجة.

فلو بدأنا بكلام صحيح واستنبطنا منه كلام خاطئ لا بد أنه قد وقع خطأ ما في عملية الاستنباط. لذلك المثال التالي:

$$-2 < -1 \rightarrow (-2)^2 < (-1)^2$$

هو مثال لفرضية خاطئة لأن المقدمة صحيحة والنتيجة خطأ. رياضياً، ليس بالضرورة أن نأخذ عددين أحدهما أصغر من الآخر ونربعهما فيكون تربيع الصغير أقل من تربيع الكبير إلا في حالة كون هذين العددين عددين موجبين. لقد كان الخطأ في الفرضية السابقة أننا طبقنا مبدءاً رياضياً لا يصلح للأعداد السالبة على عددين سالبين.

توجد إشكالية بسيطة في قضية الاستنباط وهي الحالة التي تكون فيها المقدمة خطأ والنتيجة صحيحة. كمثال على هذه الحالة لننظر إلى الفرضية التالية:

$$1 < -2 \rightarrow (1)^2 < (-2)^2$$

كما نعرف فإن تطبيق مبدأ تربيع الطرفين لا يجوز هنا لأن أحد العددين سالب. تطبيق هذا المبدأ الخاطئ أدى إلى تحويل فرضية خاطئة إلى فرضية صحيحة أثناء عملية

الاستنباط. إن هذا الحدث يشبه في الحياة العملية أن يقوم شخص بإعطائنا معلومات خاطئة للقيام بتجربة ما ونقوم نحن بدورنا بعمل خطأ أثناء تنفيذ التجربة مما يؤدي إلى الحصول على النتيجة الصحيحة المطلوبة. إذا كان المقيم للتجربة مهتماً فقط بالجواب النهائي أو غفل عن ما جرى قبل انتهاء التجربة فإنه سيعتبر أننا منا بالعمل المطلوب بشكل صحيح. إذاً يمكن اعتبار أن عواقب الخطأين في بداية التجربة كانت حميدة على نهاية التجربة وكأن أحد الخطأين ألغى الآخر وتمّ كل شيء بسلام. بهذا الفهم سنعتبر الفرضية الأخيرة فرضية صحيحة ونكتب جدول الصواب والخطأ لعملية الاستنباط كالتالي:

p q	$p \rightarrow q$
T T	T
T F	F
F T	T
F F	T

العملية الأخيرة التي سندرسها بهدف دمج فرضيتين معاً هي عملية الاستنباط المزدوج. رمز هذه العملية هو $\leftrightarrow$ حيث يدل رأسي السهم على أن الاستنباط يكون من الفرضية الأولى إلى الثانية وبالعكس أيضاً من الفرضية الثانية إلى الأولى. المثال الرياضي التالي يوضح الفكرة:

$$x = 2 \leftrightarrow x^2 = 4$$

المثال يعني أنه لو كان العدد المجهول x له القيمة 2 لوجب أن يكون تربيعه 4 وبالعكس لو كان تربيع العدد المجهول x^2 هو 4 لوجب أن يكون العدد x له القيمة 2. إن الجزء الأول من المعنى السابق صحيح ولكن الجزء الثاني (العكسي) خطأ. بما أن الاستنباط يجب أن يتم بالاتجاهين معاً فإن كون أحد الاتجاهين خطأ سيؤدي إلى كون الفرضية كاملة خطأ. إذا أردنا تطبيق هذا الفهم على دمج فرضيتين معاً باستخدام $\leftrightarrow$، فإنه

يجب أن يكون الاستنباط من اليسار إلى اليمين ومن اليمين إلى اليسار صحيحاً لكـــي تكون الفرضية المركبة صحيحة. حسب فهمنا للاستنباط العادي نقول إذاً أن الصحيح يؤدي إلى الصحيح وبالعكس كلام سليم. كما أن الخطأ يؤدي إلى الخطأ وبــــالعكس كلام سليم. كون إحدى الفرضيتين خطأ والأخرى صحيحة يؤدي إلى أن أحد اتجاهي الاستنباط سيكون من الفرضية الصحيحة إلى الخاطئة ممـــا يـــؤدي إلى رفـــض هـــذا الاستنباط وبالتالي رفض الفرضية كاملة. خلاصة شرحنا ندوّنها في الجدول التالي:

p q	$p \leftrightarrow q$
T T	T
T F	F
F T	F
F F	T

الفصل الثاني

تكافؤ الفرضيات المركبة

إذا كان لدينا أكثر من عملية منطقية سيتم تطبيقها على فرضيتين فإننا نستخدم الأقواس للدلالة على أولية تنفيذ العمليات. مثلا، الفرضية المركبة التالية:

$$(p \rightarrow q) \;\wedge\; (q \rightarrow p)$$

تعني أن يتم تنفيذ الاستنباطين أولا ثم العطف بواو ثانيا. عند حساب جدول الصواب والخطأ لهذه الفرضية نرسم بعد العمود الأول (الخاص بالفرضيتان p و q) أعمدة بالتتابع يتم حساب ناتج كل عملية في داخله بحسب الترتيب المعطى في الفرضية المركبة، أي الفرضية السابق يكون جدولها كالتالي:

p q	ɔ → q	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T T	T	T	T
T F	F	T	F
F T	T	F	F
F F	T	T	T

نلاحظ أن العمود النهائي هو نفسه العمود النهائي في جدول عملية الاستنباط المزدوج. في هذه الحالة نقول بأن الفرضية $q \leftrightarrow p$ تكافئ الفرضية

$$(p \rightarrow q) \;\wedge\; (q \rightarrow p)$$

لغويا، التكافؤ معناه هنا أن الفرضيتان لهما نفس العمل، فالاستنباط المزدوج كما شرحناه يعني أن الفرضية الأولى p تتضمن الفرضية الثانية q وفي نفس الوقت الفرضية الثانية q تتضمن الفرضية الأولى p. هذا الكلام هو بالضبط ما نعبر عنه رموز الفرضية

المركبة التي كان لها جدول مشابه لجدول الاستنباط المزدوج حيث تطابق العمود الأخير في كلا الجدولين. قد لا تكون الأمور دائماً بهذا الوضوح، فمثلاً جدول الفرضية المركبة $\bar{p} \vee q$ هو التالي:

p q	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee q$
T T	F	T
T F	F	F
F T	T	T
F F	T	T

لاحظ أن العمود الأخير في هذا الجدول هو نفس العمود الأخير في جدول الاستنباط العادي. بمعنى آخر نقول أن الفرضيتان

$$p \rightarrow q \ , \ \bar{p} \vee q$$

هما فرضيتان متكافئتان. يتم التعبير عن هذا التكافؤ بالرموز كالتالي:

$$p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$$

مثـــال: توجد علاقة تكافؤ مشهورة وهي

$$p \rightarrow q \equiv \bar{q} \rightarrow \bar{p}$$

شهرتها تأتي من ترجمتها لغويا إلى عبارات تحمل نفس المعنى. مثلا، لو اعتبرنا الفرضية الأولى هي العبارة الدنيا تمطر والفرضية الثانية هي العبارة سأبقى في البيت فإن الفرضية المركبة بالاستنباط تكون: إذا كانت الدنيا تمطر، فسأبقى في البيت. الفرضية المركبة المكافئة لها تكتب بالعربية كالتالي: إذا خرجت من البيت، فإن الدنيا لم تكن تمطر.

يبدو هذا منطقيا حيث أن الشخص كما يبدو يعاني من الخوف من المطر مما يمنعه من الخروج أثناء المطر. لذلك، خروجه من البيت يعني بالضرورة أن الأجواء كانت تخلو من الأمطار المخيفة له. إثبات تكافؤ الفرضيتين هو أمر بسيط باستخدام جداول الصواب والخطأ وسنتركه للطالب.

مثـــــال: هل الفرضية المركبة $p \rightarrow (q \wedge r)$ تكافئ الفرضية المركبة التالية:

$\bar{p} \rightarrow (p \vee q)$ ؟

الحـــل: لا بد أن ننبه هنا إلى أن الفرضية الأولى تحتوي على ثلاث فرضيـــات p و q و r. لذلك جدول الصواب والخطأ يحتوي في عموده الأول على ثمانية أسطر تعبر عـــن ثلاثة احتمالات مستقلة لكل فرضية من ناحية الخطأ أو الصواب. إذاً، يكون جـــدول الفرضية الأولى كالتالي:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

لمقارنة هذا الجدول مع جدول الفرضية المركبة الثانية، يجب أن نحسب جدول الفرضيـــة الثانية بما يتوافق مع هذا الجدول. أي يجب أن يكون جدول الفرضية الثانية له نفـــس العمود الأول المحتوى على احتمالات p و q و r بالرغم من أن r لا تظهر في الفرضيـــة الثانية. كان يفترض أن يكون جدول الفرضية الثانية مكوناً فقط من أربعـــة ســـطور، ولكن لأهداف المقارنة نحسب جدول الفرضية الثانية كالتالي:

p	q	r	$\bar{p}$	$p \vee q$	$\bar{p} \rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	T
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	F
F	F	F	T	F	F

عند مقارنة العمود النهائي هنا مع العمود النهائي للجدول السابق نكشف وجود اختلاف في السطر الثاني. وجود اختلاف واحد على الأقل يعني أن الفرضيتان غير متكافئتان، ولا داعي لاستكمال المقارنة حتى النهاية.

مثال: هل الفرضية المركبة $(r \vee p) \rightarrow q$ تكافئ الفرضية $p \rightarrow (s \vee q)$ ؟

فكرة الحل: لاحظ أننا هنا نتحدث عن أربعة فرضيات أساسية وهي p و q و r و s. لذلك ، نحسب لكل فرضية مركبة جدول عموده الأول يحتوي على جميع احتمالات p و q و r و s من ناحية الصواب أو الخطأ، و التي يبلغ عددها ستة عشر احتمالاً.

توجد بعض قوانين التكافؤ المعروفة التي سنستخدمها لاحقاً. يمكن بسهولة للطالب أن يثبت هذه القوانين، ولذا سنكتفي بكتابة نصها كالتالي:

1- $\overline{(p \wedge q)} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$ (قانون مورجان الأول)

2- $\overline{(p \vee q)} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$ (قانون مورجان الثاني)

3- $p \wedge q \equiv q \wedge p$ (قانون التبديل الأول)

4- $p \vee q \equiv q \vee p$ (قانون التبديل الثاني)

5- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ (قانون الترتيب)

6- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ (قانون الترتيب)

7- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (قانون التوزيع)

8- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (قانون التوزيع)

9- $(p \to q) \wedge (r \to q) \equiv (p \vee r) \to q$

10- $(p \wedge q) \to r \equiv p \to (q \to r)$

11- $\bar{\bar{p}} \equiv p$

12- $p \vee (q \wedge \bar{q}) \equiv p$

13- $p \wedge (q \vee \bar{q}) \equiv p$

14- $p \equiv p \vee p$ (قانون المشابهة)

15- $p \equiv p \wedge p$ (قانون المشابهة)

يمكن استخدام أحياناً طرق رياضية لإثبات التكافؤ دون حساب الجداول وذلك عن طريق استخدام علاقات وقوانين تكافؤ معروفة. مثلاً، لإثبات التكافؤ التالي:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$$

نبدأ بالطرف اليسار ثم نستبدل هذه الفرضية بفرضية مكافئة، ونعيد الكرة على هذه الفرضية وما تُستبدل به حتى نصل إلى الفرضية على الطرف اليمين:

من معلومات سابقة نعرف أن

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

وكذلك نعرف أن

$$(p \to q) \wedge (q \to p) \equiv (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p)$$

حسب قوانين التوزيع يستبدل الطرف الأيمن بالفرضية التالية:

$$[\bar{p} \wedge (\bar{q} \vee p)] \vee [q \wedge (\bar{q} \vee p)]$$

وباستخدام قوانين التوزيع لكل قوس معقوف على حدة

$$[(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge p)] \vee [(q \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge p)]$$

حسب القانون (13) وحسب قانون الترتيب يتم تبسيط المصطلح الأخير إلى

$$[(\bar{p} \wedge \bar{q})] \vee [(q \wedge p)]$$

حسب قانون الترتيب مرة أخرى يمكن تحويل هذا المصطلح إلى الفرضية المركبة على الطرف الأيمن في علاقة التكافؤ المنشودة، وهو المطلوب .

مثـــال: بسط الفرضية المركبة التالي إلى فرضية مركبة مكافئة.

$$[(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \rightarrow (q \vee r)$$

حسب معلومات سابقة نستبدل هذه الفرضية بالفرضية

$$[(\bar{p} \vee q) \vee (\bar{p} \vee r)] \rightarrow (q \vee r)$$

حسب قوانين الترتيب والتبديل والتشابه ينتج

$$[\bar{p} \vee (q \vee r)] \rightarrow (q \vee r)$$

ونعيد استخدام معلوماتنا السابقة للحصول على

$$\overline{\bar{p} \vee (q \vee r)} \vee (q \vee r)$$

حسب قانون مورجان الثاني وقانون (11) ينتج

$$[(p \wedge \overline{(q \wedge r)}] \vee (q \vee r)$$

حسب قوانين التبديل والتوزيع نحصل على

$$[p \vee (q \vee r)] \wedge [(q \vee r) \vee \overline{(q \vee r)}]$$

حسب قانون (13) ينتج الجواب النهائي

$$p \vee (q \vee r)$$

يمكن للتأكد من الجواب النهائي عن طريق مقارنة جدول هذه الفرضية الأخيرة مع جدول الفرضية الأصلية وملاحظة تطابق الأعمدة النهائية.

الفصل الثالث

فرضيات لكل و يوجد

العبارة الرياضية التالية

$$x^2 - 4x + 2 > 0$$

ليست فرضية لأنها ليست جملة رياضية مفيدة ذات معنى، وإنما هي متباينة رياضية توجد لها مجموعة حل. لو اخترنا قيمة للعدد المجهول x من مجموعة الحل مثل القيمة 3 لحصلنا على الفرضية الصحيحة:

$$3^2 - 4 * 3 + 2 > 0$$

ولو اخترنا قيم للعدد المجهول x من خارج مجموعة الحل مثل القيم 1 لحصلنا على الفرضية الخاطئة:

$$1^2 - 4 * 1 + 2 > 0$$

نلاحظ أن العبارة الرياضية أعلاه قد تكون فرضية صحيحة أو خاطئة بعد تعويض قيمة محددة للعدد x. يدعى مثل هذا النوع من العبارات باقتران الفرضيات حيث أنه يشبه الاقتران من ناحية أن كل تحديد لقيمة x يعطي فرضية جديدة (بدل صورة جديدة) تختلف قيمتها المنطقية صواب أم خطأ باختلاف قيمة x . لذا يرمز لهذه العبارة بالرمز P(x) أي يكتب

$$P(x) : x^2 - 4x + 2 > 0$$

توجد طريقة لتحويل اقتران فرضيات إلى فرضية واحدة محددة، ذلك باستخدام وصف لقيم x المحتملة للتعويض في اقتران الفرضيات. أي إننا نحدد المجال الذي سنختار

منه قيم x للتعويض في اقتران الفرضيات. ابسط هذه الطرق هي تحديد x بجميع قيم فترة ما كفترة الأعداد الطبيعية. مثلاً، عندما نقول لكل عدد طبيعي n يتحقق أن n^2 عدد طبيعي، تكون هذا الجملة جملة رياضية مفيدة وصائبة. لإثبات صحتها يمكن التفكير كالتالي: n^2 هي ضرب العدد بنفسه وهذا معناه أن يجمع العدد n إلى نفسه n من المرات. بما أن جمع عددين طبيعين يؤدي إلى إنتاج عدد طبيعي حسب قوانين الأعداد، فإن كون n عدد طبيعي يثبت أن n^2 عدد طبيعي. هذه الجملة الرياضية التي أثبتناها هي إذن فرضية صحيحة وتكتب بالرموز كالتالي:

$$\forall n \quad \text{natural} \ , \ n^2 \quad \text{natural}$$

يأتي الرمز ∀ من قلب أول حرف من كلمة All بالإنجليزية ومعناها كل. لننظر إلى فرضية لكل التالية:

$$\forall x \quad , \quad x^2 \ \geq 0$$

معنى هذه الفرضية أن لكل الأعداد الحقيقية يتحقق أن تربيعها أكبر أو يساوي صفر. هذه فرضية صحيحة لأن تربيع العدد الموجب أو السالب موجب وتربيع الصفر صفراً، أي في كلا الحالتين النتيجة إما تساوي أو اكبر من صفر. لو أهملنا إشارة المساواة في الفرضية لأصبحت

$$\forall x \quad , \quad x^2 \ > \ 0$$

في هذا الشكل الفرضية خاطئة لأن الصفر يقع ضمن مجال اختيار الأعداد، لكنه لا يحقق الصفة التي نصت عليها الفرضية. يدعى الصفر في هذه الحالة مثال مناقض حيث أن أي عدد محدد في مجال فرضية لكل لا يحقق ما تنص عليه يعمل على تقويض صحتها. إذاً، لاحظنا أن فرضية لكل الصحيحة تحتاج إلى إثبات رياضي لبيان صحتها، أما فرضية لكل الخاطئة فإنها تحتاج إلى مثال مناقض واحد فقط لبيان خطائها. لننظر إلى بعض الأمثلة:

1) $\forall x \quad , \quad x^2 \ \geq -1$

الفرضية صحيحة لأن تربيع الأعداد الحقيقية أكبر أو يساوي صفر. بما أن صفر أكـــبر من 1-، إذن صفر أكبر أو يساوي 1- (تذكر بأن أو تكون صحيحة إذا صح أحـــد شقيها وليس بالضرورة كلاهما). باستخدام مبدأ التعدي لعلاقة اكبر أو يساوي لا بـــد أن يكون العدد الأول x^2 أكبر أو يساوي العدد الأخير 1-، وهو المطلوب.

2) $\forall x \quad , \quad x^2 < 3$

فرضية خاطئة بسبب وجود العديد من الأمثلة المناقضة وأحدها هو

$$x = -4$$

3) $\forall x \quad , \quad x < x^2$

فرضية خاطئة وكمثال مناقض لنأخذ

$$x = \frac{1}{2}$$

4) $\forall x$ even , $x + 2$ even

فرضية صحيحة لأننا نعرف من طبيعة الأعداد بأن زيادة واحد تقلب العدد الفردي إلى زوجي والعدد الزوجي إلى فردي. لذلك عند إضافة واحد مرتين إلى العدد الزوجـــي ينقلب مرتين فيعود إلى وضعه الأصلي أي كونه عدد زوجي.

الطريقة الثانية لتحويل اقتران فرضيات إلى فرضية تكون باستخدام كلمة يوجـــد، بمعنى يوجد على الأقل أحد الأعداد داخل المجال المتاح لاختيار الأعداد يحقـــق نـــص اقتران الفرضيات. الرمز الرياضي لهذه الأداة هو $\exists$ حيث يدل هذا الرمز على بدايـــة كلمة Exist بالإنجليزية ومعناها يوجد. لكن، هنا قمنا بعكس الحرف الأول من اليسار إلى اليمين. كمثال على هذه الطريقة لننظر إلى الفرضية التالية:

$$\exists x \quad , \quad x^2 = -1$$

صياغة معنى الفرضية بالعربية تكون أنه يوجد عدد حقيقي بحيث يكون تربيعه مســـاوٍ للعدد سالب واحد. هذا كلام مستحيل لأنه كما ذكرنا سابقاً تربيع الأعداد الحقيقيـــة

أكبر أو يساوي صفر، ولذا فلن يقترب x^2 من العدد سالب واحد إطلاقا. إذا، الفرضية السابقة باستخدام يوجد فرضية خاطئة وقد شرحنا عدم صحتها باستخدام أفكار رياضية. لاحظ أن هذا النهج كان هو الأسلوب المعتمد في إثبات صحة فرضية لكل. وجود هذا التعاكس في العمل ينطبق في الحالة الثانية لفرضية يوجد وهو كونها صحيحة. لفهم ذلك دعنا ننظر إلى الفرضية الصحيحة التالية:

$$\exists\ x \quad , \quad x^2 = 4$$

نحن نعرف أنه يوجد عددان تربيعهما يعطي 4 وهما 2 و 2- . لذلك يمكن اعتبار $x=2$ (أو $x = -2$) هو العدد الذي تحدثت عن وجوده الفرضية الأخيرة. هذا التحديد لقيمة العدد المجهول x يدعى مثالا مؤيدا لأنه حقق الصفة المطلوبة في نص الفرضية، نلاحظ أن صحة فرضية يوجد يبرهنها وجود مثال مؤيد واحد. لنأخذ المزيد من الأمثلة:

1) $\exists\ x \text{ even} \ , \ x+2 \text{ even}$

فرضية صحيحة وكمثال مؤيد العدد

$$x = 6$$

لاحظ أن أي عدد زوجي يصلح هنا كمثال مؤيد.

2) $\exists\, x \quad , \quad x^2 \geq -1$

فرضية صحيحة وكمثال مؤيد العدد

$$x = 3$$

لاحظ أن تعويض قيمة x بالعدد 3 تؤدي إلى الحصول على فرضية صحيحة وهي

$$3^2 \geq -1 \Rightarrow 9 \geq -1$$

حيث أن أكبر أو يساوي تكون صحيحة في حال صح أحد الشقان (وهنا يصح شق أكبر).

3) $\exists\ x \quad , \quad x^2 + 2x + 1 < 0$

فرضية خاطئة لأن المصطلح على يسار المتباينة هو تربيع المقـدار $x + 1$، وتربيـع أي مقدار حقيقي يكون أكبر أو يساوي صفر، أي ليس أقل من صفر.

4) $\exists\ x\ \text{even}\ ,\ x^2\ \text{odd}$.

فرضية خاطئة لأن تربيع العدد الزوجي يعني جمع هذا العدد الزوجي إلى نفسه عـدداً زوجياً من المرات. وبما أن جمع أعدادا زوجية مع بعضها البعض يعطي دائمـاً عـدد زوجي، إذن يستحيل كون x^2 عدداً فردياً.

لقد لاحظنا سابقاً مبدأ التناظر أو التعاكس في عمل فرضية لكل وفرضية يوجـد. يتم التعبير أحياناً عن هذا المبدأ من خلال علاقتي التكافؤ التاليتين:

1) $\overline{\exists\ x\ ,\ p(x)} \equiv \forall x , \overline{p(x)}$

2) $\overline{\forall\ x\ ,\ p(x)} \equiv \exists x , \overline{p(x)}$

أي أن نفي فرضية من نوع لكل أو يوجد يكافئ فرضية من النوع الآخر بحيث تكـون الصفة في نص الفرضية هي الصفة المنفية. لو فكرنا في الفرضية

$$\exists\ x\ ,\ x^2 > -1$$

هذه فرضية صحيحة ولها مثال مؤيد قيمة x العدد صفر. عندما نفي هذه الفرضية أي نقول لا يوجد عدد حقيقي بحيث تربيعه أكبر من -1 تصبح العبارة من ناحية المعـنى مكافئة للعبارة: كل عدد حقيقي تربيعه أصغر أو يساوي -1. بالرموز العبارة تكون

$$\forall\ x\ ,\ x^2 \leq -1$$

هذه العبارة فرضية خاطئة لأنه عندما تكون قيمة x العدد صفر نحصـل علـى مثـال مناقض للفرضية. أي إن المثال المؤيد تحول بعد النفي إلى مثال ناقض. هـذا منطقـي جداً لأن النفي يقلب الفرضية الصحيحة إلى فرضية خاطئة. الآن، لو فكرنا في الفرضية

$$\forall x\ ,\ x^2 + 1 > 0$$

الفرضية صحيحة لأن جمع واحـــد (عدد موجب) إلى x^2 (عدد موجـــب أو صفـــر) يعطي عدداً موجباً. عندما ننفي هذه الفرضية نقول ليس لكل الأعداد الحقيقية يتحقق

$$x^2 + 1 > 0$$

أي بمعنى مكافئ: يوجد عدد حقيقي بحيث يتحقق له

$$x^2 + 1 \leq 0$$

عند إمعان النظر في العبارة الأخيرة نكتشف عدم وجود مثل هذا العـــدد لأن الـــتربيع موجب أو صفر وإضافة واحد ستزيد المقدار فيصبح أكبر من صفر وليس أقل أو مساوٍ للصفر. إذاً، نفي فرضية لكل الصحيحة حوّلها إلى فرضية يوجد خاطئة وكان الإثبـــات الرياضي لصحة الفرضية الأولى هو نفسه الإثبات لعدم صحة الفرضية الثانية.

كما توجد اقترانات عادية تعتمد على مجهولين، توجــــد في المنطـــق اقترانـــات فرضيات تعتمد على عددين مجهولين. مثلاً، العبارة

$$x^2 + y^2 \geq 0$$

هي اقتران فرضيات يعتمد على x و y. يمكننا استخدام رمز لكل أو يوجد مع كـــلا المجهولين بشكل مستقل عن الآخر. فلو كتبنا الفرضية التالية:

$$\forall x \quad \forall y, x^2 + y^2 \geq 0$$

لكان لها المعنى أنه بغض النظر عن قيمة العدد x أو قيمة العدد y فإن حـــاصل جمـــع ترابيعهما يكون أكبر أو مساوٍ للصفر. هذه فرضية صحيحة لأن جمع عددين كلاهمـــا أكبر أو مساوٍ للصفر يعطي عدداً يحمل نفس الصفة. لنأخذ الفرضية التالية:

$$\exists x \; \exists y , \quad x^2 + y^2 = 5$$

هذه فرضية يوجد ذات مجهولين، وهي فرضية صحيحة بدليل أن المثال المؤيد هو

$$x = -2 \; , y = 1$$

ماذا يحدث لو كان الوضع كالتالي:

$$\exists x \quad \forall y \; , x^2 + y^2 = 5$$

هذه أيضا تعتبر فرضية يوجد بسبب بدايتها، ولكنها فرضية خاطئة. لفهم ذلك يجب علينا أن نترجمها بشكل صحيح إلى اللغة العربية. الفرضية تقول أنه يوجد عدد (ثابت) يتم تحديده بحيث يكون جمع تربيعه مع تربيع قيم عدد آخر (بغض النظر ما هي) مساوٍ دائماً للعدد 5. بما أن العدد الثاني يملك حرية التغير، إذن سيبدأ الطرف الأيسر في المعادلة بالتغير وفقاً لتغير العدد الثاني ولا توجد إمكانية لتثبيت الطرف الأيسر على القيمة 5. لكي نثبت عدم صحة الفرضية بشكل رياضي أدق، نفترض وجود عدد x يحقق المعادلة

$$x^2 + y^2 = 5$$

بغض النظر عن قيمة y ونخلق تناقضاً رياضياً. هذه الطريقة تدعى بطريقة الإثبات غير المباشر. إن العدد x المفترض يحقق المعادلة المذكورة باستخدام قيم مختلفة للعدد y مثل 1 و 2 ، أي لدينا المعادلتان

$$x^2 + 1 = 5 \quad , \quad x^2 + 4 = 5$$

ينتج من المعادلة الأولى المعلومة التالية

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 , -2$$

وينتج من المعادلة الثانية المعلومة التالية

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 , -1$$

بما أنه لا يمكن التوفيق بين الاستنتاج الأول والثاني يخلق لدينا تناقض رياضي. لتعميق الفكرة سننظر إلى الفرضية التالية:

$$\exists x \quad \forall y \ , x + y \ \text{even}$$

لو افترضنا فعلاً وجود مثل هذا العدد x لحصلنا على المعلومات التالية:

$$x + 1 \ \text{even} \ , \ x + 2 \ \text{even}$$

من المعلوم أن طرح عددين زوجين يعطي عدداً زوجياً، لذلك لا بد أن يكون الفرق التالي:

$$(x + 2) - (x + 1) = 1$$

عدداً زوجياً، لكن هذا الكلام غير صحيح (تناقض رياضي). هذا مفـــاده أن فرضيـــة يوجد خطأ.

لو استبدلنا رمزي $\forall$ و $\exists$ في الفرضية المزدوجة السابقة لأصبحت فرضية لكـــل على الصورة التالية:

$$\forall x \quad \exists y \quad , \quad x^2 + y^2 = 5$$

لا يمكن طبعاً إيجاد عدد y يتناسب مع أي عدد x بحيث تتحقق المعادلة. يوجد العديـــد من الأعداد كاحتمال ممكن لقيمة العدد x التي لا يوجد لها قيمة مناسبة للتعويض بـــدل العدد y بحيث تتحقق المعادلة مثل العدد 3. عندما تكون قيمـــة x العـــدد 3 يصبـــح المطلوب أن نحدد قيمة للعدد y بحيث يكون

$$9 + y^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad y^2 = -4$$

هذا مطلب غير ممكن، ولذا فرضية لكل خاطئة ويعتبر $x = 3$ مثالاً مناقضاً. ســـــنعطي الآن مثالاً على فرضية لكل مع يوجد بحيث تكون صحيحة:

$$\forall x \quad \exists y \ , \ x + y = 5$$

عند إعطاء أي قيمة للعدد x يمكن تحديد قيمة حقيقية للعدد y تتناسب مـــع قيمـــة x المعطاة وهي القيمة $5 - x$، أي تصبح المعادلة

$$x + y = x + x - 5 = 5$$

متحققة. نظراً لصعوبة هذا النوع من الفرضيات سنوجز فيما يلي بعض الأمثلة عليها:

1) $\exists x \ \forall y \ , \ xy = 0$

فرضية يوجد صحيحة وعليها المثال المؤيد

$$x = 0$$

2) $\forall x \quad \exists y \quad , \quad xy = 0$

فرضية لكل صحيحة لأننا سنختار قيمة y دائماً صفر كعدد يتناسب مع قيم العـــدد x المختلفة.

3) $\forall x \ \exists y \quad , \ xy = 1$

فرضية لكل خاطئة وعليها المثال المناقض

$x = 0$

4) $\exists x \ \forall y \ . \ xy = 1$

فرضية يوجد خاطئة لأنه لو وجد عدد x يحقق المعادلة لكل قيم y، لحصلنا على المعادلتين التاليتين بعد تعويض 1 و 1- بدل العدد y:

$$x = 1 \ , \ x = -1$$

هذا تناقض رياضي لأن x تغيرت قيمتها.

5) $\forall x \ \exists y \ , xy \geq 0$

فرضية لكل صحيحة لأنه بغض النظر عن قيمة العدد x نختر العدد y دائما مطابق للعدد x فينتج

$$xy = x^2 \geq 0$$

أي متباينة صحيحة.

6) $\forall x \ \exists y \ , \ xy > 0$

فرضية لكل خاطئة وعليها المثال المناقض

$$x = 0$$

7) $\forall x \ \exists y \ , \ x^2 + y^2 > 7$

فرضية صحيحة لأننا نختار لكل قيم x العدد y عدداً ثابتاً وهو 3 فنحصل على المتباينة الصحيحة:

$$x^2 + 9 > 7 \Rightarrow x^2 > -2$$

8) $\exists x \ \forall y \ , \ x^2 + y^2 > 7$

فرضية يوجد صحيحة وعليها العديد من الأمثلة المؤيدة، وأحد هذه الأمثلة

$$x = 4$$

9) $\exists x \ \forall y \ , \ xy > 0$

فرضية يوجد خاطئة لأنه لو وجد مثل هذا العدد x الذي يصلح لجميع اختيارات y،

لتحققت المتباينة في حال كون y العدد صفر. لكن، في هذه الحالة يكـــون حـــاصل الضرب صفراً وليس أكبر من الصفر.

10) $\exists x \ \forall y \ , \ xy \geq 0$

فرضية صحيحة وعليها المثال المؤيد الوحيد

$$x = 0$$

11) $\forall x \ \exists y \ , \ x + y \geq 0$

فرضية صحيحة لأننا باختيار y على أنها

$$x^2 + x + 1$$

نحصل على المتباينة الصحيحة

$$x + y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 > 0$$

12) $\exists x \ \forall y \ , \ x + y > 0$

فرضية خاطئة لان اختيار y على أنها سالب قيمة العدد x يؤدي إلى تشكل التنـــاقض الرياضي بأن صفر أكبر من صفر.

الفصل الرابع

الاستقراء الرياضي

يقصد بالاستقراء هنا طريقة لإثبات قوانين رياضية تتعلق بالأعداد الطبيعية. عادة ما تكون هذه القوانين قوانين جمع مثل القانون:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

نص القانون يدل على أن جمع الأعداد الطبيعية من 1 إلى العدد n تباعاً يعطي النتيجة على الطرف الأيمن، أي نصف حاصل ضرب الحد الأخير n مع الحد الذي يليه n+1. لو فكرنا في جمع الأعداد الطبيعية من 1 إلى 10 لحصلنا على العدد 55. يمكن الحصول على نفس النتيجة مباشرة من خلال حساب المقدار

$$\frac{10*11}{2} = \frac{110}{2} = 55$$

لإجراء الاستقراء على القانون السابق يجب علينا بدايةً عمل خطوة الأساس. في هذه الخطوة نجري حساباً عددياً كما فعلنا مع العدد 10، ولكننا نختار عدداً أقل من أجل توفير الجهد. أي سنجرب القانون باستخدام عدد صغير كالعدد 3. الطرف الأيسر يعطي في هذه الحالة

$$1 + 2 + 3 = 6$$

أما الطرف الأيمن فيؤدي إلى

$$\frac{3*4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

تساوي الطرفين يعني أن خطوة الأساس (أو التجربة) كانت صحيحة، ويمكن متابعة الإثبات بالاستقراء. الخطوة الثانية تكون خطوة الاستقراء الفعلي حيث نحاول أن نستقرئ في المستقبل بمعنى ننطلق من وجود عدد طبيعي m يحقق نص القانون وننظر إلى فعل العدد الذي يليه. إن العدد الطبيعي الذي يلي m هو m + 1 والسؤال المطروح هل يحقق هذا العدد بدوره نص القانون ؟ أي هل ستكون المعادلة التالية صحيحة:

$$1 + 2 + \ldots + (m+1) = \frac{(m+1)[(m+1)+1]}{2} ?$$

لاحظ أننا عوضنا m + 1 داخل قوسين للحفاظ عليه كعدد واحد متماسك. لقد افترضنا بأن m يحقق نص القانون أي أن المعادلة التالية صحيحة:

$$1 + 2 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2}. \qquad :$$

هذا الافتراض واقعي وليس خيالي لأنه تم الإثبات في خطة الأساس بأن العدد 3 يصلح لكي يكون هذا العدد الطبيعي m. لكننا لا نريد أن نقيّد أنفسنا بقيمة محددة للعدد m ونتركها مجهولة ونحاول معرفة هل ستنتقل صفة تحقيق القانون منm إلى العدد m+1 ؟ للإجابة عن هذا السؤال نعود إلى صياغته الرياضية على صورة معادلة فيها طرفان نبحث في تساويهما. لنأخذ الطرف الأيسر وهو طرف الجمع من1 تباعاً حتى m+1. لا بد من المرور بالعدد m قبل الوصول إلى m+1 عند كتابة الأعداد الطبيعية تباعاً، أي الطرف الأيسر هو

$$1 + 2 + \ldots + m + (m+1)$$

نحن نعرف من الافتراض حول m أن مجموع الأعداد من 1 تباعاً حتى m (الحد قبل الأخير في الطرف الأيسر) مساوٍ لنصف m (m+1). لذلك، يمكن كتابة الطرف الأيسر على الصورة الجديدة

$$\frac{m(m+1)}{2} + (m+1)$$

نخرج المقدار $m + 1$ كعامل مشترك فينتج

$$(m+1)\left[\frac{m}{2} + 1\right] = (m+1)\ \frac{m+2}{2}$$

لو نظرنا الآن إلى الطرف الأيمن وقمنا بإزالة قوسين حول $m + 1$ لنتج

$$\frac{(m+1)\ (m+2)}{2}$$

أي أنه يمكن إيصال الطرفين الأيمن والأيسر إلى المقدار نفسه. لذا الطرفان متساويان ونستنتج أن $m + 1$ يحقق بدوره نص القانون كما فعل m. هذه المعلومة التي اكتشفناها في خطوة الاستقراء جوهرية لإثبات القانون المطلوب وغيره من القوانين على نفس الشاكلة. إذ نقول بأننا نستفيد من خطوتي الأساس والاستقراء في الإثبات كالتالي: نجحنا أولاً في إثبات أن العدد 3 يحقق القانون، ثانياً سيحقق العدد 4 بناءاً على خطوة الاستقراء بدوره القانون لأنه يلي العدد 3 مباشرة. العدد 4 سيجعل العدد الذي يليه وهو 5 يحقق القانون أيضاً. ستستمر عملية نقل صفة تحقيق القانون من العدد 5 إلى جميع الأعداد الطبيعية التي تليه بالتوالي. إذاً، في النهاية تكون صفة تحقيق القانون قد انتشرت من العدد 3 إلى جميع الأعداد الأكبر. للتأكد من أن العددان 1 و 2 يحققان القانون، يمكن تجربة ذلك بسرعة ونحصل بهذه الطريقة عى قانون صحيح لكل الأعداد الطبيعية. يكتب هذا القانون أحياناً على الصورة التالية:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, n = 1,2,\ldots$$

لتعميق الأفكار الواردة في هذا الفصل سنثبت بالتفصيل قانون الأعداد المربعة أي

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n = 1,2,\ldots$$

سنتأكد بدايةً في خطوة الأساس من أن أول عدد طبيعي وهو العدد 1 يخضع له فعلاً هذا القانون. تعويض العدد 1 في الطرف الأيسر يعطي

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$$

وتعويض العدد 1 في الطرف الأيمن يعطي

$$\frac{1 * 2 * 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

إذاً، الطرفان متساويان عند تعويض أول عدد طبيعي في نص القانون. ننتقل الآن إلى خطوة الاستقراء. سنفترض أن لدينا عدد طبيعي m يحقق القانون أي لدينا المعادلة التالية جاهزة للاستخدام:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

سنعوض الآن m+1 بدل n ونحصل في الطرف الأيسر من القانون على

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (m+1)^2$$

لاحظ أن التربيع هو للأعداد الطبيعية التي تتوالى ثم يتم جمع ترابيعها. لذلك يكون الحد قبل الأخير في هذا المجموع هو تربيع m. لذا نعيد كتابة الطرف الأيسر على الصورة

$$1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 + (m+1)^2$$

باستبدال مجموع جميع الحدود باستثناء الأخير حسب الفرضية حول m ينتج

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2$$

نخرج m + 1 عاملاً مشتركا لنحصل على

$$(m+1)\left[\frac{m(2m+1)}{6} + (m+1)\right]$$

نجمع الكسرين معا أي ينتج

$$(m+1)\left[\frac{2m^2 + m + 6m + 6}{6}\right]$$

بعد جمع الحدود المتشابهة وإعادة فك المقدار التربيعي إلى قوسين ينتج

$$(m+1)\left[\frac{(2m+3)(m+2)}{6}\right]$$

عند تعويض m + 1 كعدد واحد متماسك في الطرف الأيمن من القانون يـأخذ هـذا الطرف الشكل

$$\frac{(m+1)\ [(m+1)+1]\ \ [2(m+1)+1]}{6}$$

عندما نفك الأقواس الداخلية نحصل على نفس الشكل الذي أخذه الطرف الأيسـر في النهاية، مما يثبت أن الطرفان يتساويان أيضاً للعـدد m+1. بذلـك تنتـهي خطـوة الاستقراء وتكون بقية الإثبات كما فعلنا في إثبات القانون الذي سبقه. كتطبيق علـى هذا القانون نحكم بأن جمع الأعداد 1 , 4 , 9 ,16 و 25 يساوي العدد

$$\frac{5 * 6 * 11}{6} = 55$$

توجد عدة قوانين جمع أخرى مشهورة منها:

1- قانون جمع تكعيب الأعداد الطبيعية:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \ ,n = 1, 2, \ldots$$

٢- قانون جمع الأعداد الطبيعية الفردية:

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n-1)^2 \ , n = 0, 1, \ldots$$

٣- قانون المتسلسلة الهندسية المحدودة:

$$\sum_{i=0}^{n} q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \ ,n = 0, 1, \ldots$$

حيث ترمز q هنا إلى عدد حقيقي ما عدا العدد 1.

يمكن إثبات هذه القوانين بسهولة باستخدام الاستقراء الرياضي. لذا سندع مهمة إثباتها بالإضافة إلى إثبات العديد من القوانين الأخرى في التمارين للطالب.

يستخدم الاستقراء أيضاً في إثبات بعض المتباينات. يكون الوضع هنا أصعب قليلاً من المعادلات لأنه يتوجب في خطوة الاستقراء البدء بأحد الطرفين والاستمرار في تكبيره حتى نصل إلى الطرف الآخر. بسبب مبدأ التعدي في عملية التكبير يكون الوضع في النهاية أنه تم إثبات المطلوب بأن أحد الطرفين أكبر من الآخر. لا توجد قاعدة معينة ترينا كيفية التكبير، وإنما ينبغي الاعتماد على الخبرة والإحساس الرياضي. لننظر معاً إلى المتباينة التالية:

$$n! \geq 2^{n-1} \quad , \quad \text{for} \ \ n = 1, 2, \ldots$$

في خطوة الأساس نجرب العدد 1، فتنتج المتباينة

$$1! = 1 \geq 2^0 = 1$$

هذه متباينة صحيحة بسبب المساواة، ولذا ننتقل إلى الخطوة الثانية من الإثبات وهي خطوة الاستقراء. في هذه الخطوة نفرض وجود عدد طبيعي m يحقق المتباينة أي يتحقق لدينا

$$m! \geq 2^{m-1}$$

يجب علينا أن نستغل هذه المعلومة في إثبات المتباينة التالية:

$$(m+1)! \geq 2^{(m+1)-1} = 2^m$$

سنأخذ للتبسيط الطرف الأيسر ونستمر في عملية تصغيره أو استبداله بمقدار مساوٍ له حتى نصل إلى الطرف الأيمن. حسب مفهوم المضروب يمكن القول بأن

$$(m+1)! = (m+1) * m!$$

في هذه الصورة التي فيها الطرف الأيسر عبارة عن حاصل ضرب عددين يمكن تصغيره من خلال تصغير أحد العددين وإبقاء الآخر كما هو. يأتي هنا دور المتباينة التي تم افتراض صحتها للتطبيق حيث نصغر الطرف الأيسر من خلال استبداله بالمقدار

$$(m+1) * 2^{m-1}$$

نحن نعرف أن m عدد طبيعي يمكن أن يكون واحد أو أكثر من ذلك حسب ما نصت عليه المتباينة بالنسبة للعدد n. لذا، قيمة العدد m + 1 هي 2 أو تزيد عن ذلك.

بالتالي الكمية الأخيرة سيتم استبدالها بكمية أصغر أو مساوية لها (من خلال اســـتبدال $m + 1$ بالعدد 2) وهي

$$2 * 2^{m-1}$$

لكن هذه الكمية حسب قوانين الأسس هي بالضبط الطرف الأيمن إذاً، نستنتج ممـــا سبق أن الطرف الأيسر أكبر أو يساوي الطرف الأيمن. قد يتسائل المرء بأن m قـــد لا تكون 1 وإنما أكثر من ذلك مما يجعل $m + 1$ أكبر من 2 وليس مساوٍ للعدد 2. هـذا لا يزعجنا لأن الاستنتاج كان له احتمال المساواة واحتمال الأكبر فإذ تحقق أي منـــهما يكون الاستنتاج صحيحاً.

تمارين: أثبت العلاقات التالية باستخدام الاستقراء الرياضي

1) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$

2) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$

3) $1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3) = n(2n-1)$

4) $1 + 2^n < 3^n, n = 2, 3, \dots$

5) $n < 2^n, n = 1, 2, \dots$

6) $1 + 2 + 3 + \dots + n < \frac{(2n+1)^2}{8}$

7) $2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

8) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

9) $2^{n+1} < 1 + (n+1)\, 2^n$

10) $\frac{1}{1*3} + \frac{2}{3*5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

11) $1*2 + 2*3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

12) $2^n \geq n^2, n = 4, 5, \dots$

الباب الثاني

المجموعات والعلاقات

الفصل الأول

مفهوم المجموعات

المجموعة هي عبارة عن تشكيلة عناصر غير مرتبة. قد تكون هذه العناصر أعـداداً أو أشخاصاً. فلو أخذنا تشكيلة الأعداد الطبيعية من 1 إلى 5 كمجموعة نكتب

$$\{1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$$

عادةً تعطى كل مجموعة اسم يميزها عن غيرها، فلو قلنا أن المجموعة السابقة اسمـــها A لتحدثنا عن انتماء العنصر 1 إلى المجموعة A . بالرموز نعبّر عن هذا الكلام:

$$1 \in A$$

سنأخذ مجموعة أخرى اسمها B أي:

$$B = \{1 , 2 , 5\}$$

نلاحظ أن عناصر B موجودون داخل المجموعة A، لذا يقال أن A تحتوي B. بـالرموز يكتب

$$B \subset A$$

تعتبر في هذه الحالة B مجموعة جزئية من المجموعة A. سنعتبر اصطلاحاً أن أي مجموعـة هي مجموعة جزئية من نفسها، بمعنى آخر تتحقق العلاقة التالية:

$$A \subset A$$

سنعتبر أيضاً بشكل اصطلاحي أن المجموعة الخالية من اية عناصر ورمزها { } هي مجموعة جزئية من أية مجموعة أخرى. لذا يمكن القول أن

$$\{\ \} \subset A\ ,\ \{\ \} \subset B$$

يستخدم عادةً رمز القيمة المطلقة في المجموعات للدلالة على عدد عناصر المجموعة. مثلاً

$$|A| = 5\ ,\ |B| = 3\ ,\ |\{\ \}| = 0$$

توجد مجموعات جزئية عديدة للمجموعة A سوى A والمجموعة الخالية. يمكن بسهولة كتابة بقية المجموعات الجزئية وملاحظة أن عددها الإجمالي هو 32. هذا العدد لم يأتي مصادفة وإنما يمثل 2 مرفوعة لقوة فيها عدد عناصر A. بلغة أخرى عدد المجموعات الجزئية من A هو

$$2^{|A|} = 2^5 = 32$$

يرمز لمجموعة المجموعات الجزئية بالرمز P. فيكون لدينا العلاقة التالية:

$$P(B) = \{\{\},\ \{1\}\ ,\ \{2\}\ ,\ \{5\}\ ,$$
$$\{1,2\}\ ,\ \{1,5\}\ ,\ \{2,5\}\ ,\ \{1,2,5\}\}.$$

لاحظ أن

$$|P(B)| = 2^{|B|} = 2^3 = 8$$

لاحظ أيضاً أن المجموعة الخالية هي عنصر من عناصر P(B) ، أي لدينا العلاقة

$$\{\ \} \in P(B)$$

بقليل من التمعن يمكن التأكد من أن

$$\{\ \} \subset P(B)\ ,\ \{\{\ \}\} \subset P(B)$$

تكون المجموعات أحياناً ذات عدد لا نهائي من العناصر. توجد بعض الأمثلة المعروفة كمجموعة الأعداد الطبيعية ورمزها IN، أي

$$IN = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

ومجموعة الأعداد الصحيحة ورمزها Z أي

$$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

الفصل الثاني

عمليات على المجموعات

عملية تقاطع مجموعتين هي عملية إيجاد العناصر المشتركة بينهما. يرمــــز هــذه العملية بالرمز ∩ . مثلاً لو اعتبرنا

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$B = \{1, 3, 5, 7\}$$

لنتج

$$A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

عملية اتحاد مجموعتين هي عملية أخذ جميع عناصر المجموعتين معاً في مجموعة واحـــدة كبيرة. في المثال السابق يكون

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

حيث رمزت ∪ إلى عملية الاتحاد.

عملية طرح مجموعة من الأخرى (حساب الفرق بين الأولى والثانيـــة) لا تشـــبه عملية طرح الأعداد. عملية طرح المجموعات تعني بأن ننتزع عناصر المجموعة الثانية من عناصر المجموعة الأولى وما يتبقى يكون هو الناتج. مثلاً،

$$A - B = \{2, 4, 6\}$$
$$B - A = \{7\}$$

لاحظ أن الطرح غير تبديلي. تعرّف عملية طرح تبديلية كالتالي:

$$A \wedge B = (A - B) \cup (B - A)$$

هذه العملية تدعى بالفرق المزدوج، وسينتج في مثالنا

$$A \Delta B = \{2, 4, 6, 7\}$$

لإثبات أن هذه العملية تبديلية نجري العملية الحسابية التالية:

$$B \Delta A = (B - A) \cup (A - B) =$$
$$(A - B) \cup (B - A) = A \Delta B$$

العملية الأخيرة التي سنهتم بها هي عملية الإتمام. لكن، لإجراء هذه العملية سنحتاج إلى اعتبار إحدى المجموعتين هي المجموعة التي تتم داخلها العملية. أما المجموعة الأخرى فيجب أن تكون مجموعة جزئية من المجموعة الأولى. تدعى في هذه الحالة المجموعة الأولى بالمجموعة الشاملة (العالمية). مثلاً، لو رمزنا إلى مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية بالرمز E ورمزنا إلى مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية بالرمز Q. هاتان المجموعتان سندرسهما تحت ظل المجموعة الشاملة مجموعة الأعداد الطبيعية. عملية إتمام المجموعة E داخل المجموعة IN تعني أن نأتي بالأعداد التي تتمم (تكمل) المجموعة E بحيث تصبح المجموعة الشاملة IN. هذه الأعداد التي لا تتواجد في E ويجب علينا إحضارها نضعها معاً في مجموعة تسمى المجموعة المتممة للمجموعة E ورمزها $\overline{E}$.
طبعاً، متممة E هي مجموعة الأعداد الفردية، أي

$$\overline{E} = Q$$

وكذلك يمكن القول أن

$$\overline{Q} = E$$

على نفس المبدأ نستطيع كتابة العلاقات

$$\overline{IN} = \{\ \} \quad , \quad \overline{\{\ \}} = IN$$

لاحظ أنه يمكن القول أن

$$\overline{E} = IN - E \quad , \quad \overline{Q} = IN - Q$$

هذا يوضح أن المتمم له علاقة بطرح المجموعة من المجموعة الشاملة. للمزيد من الإيضاح نذكر بأن القطعة المستقيمة رمزت في المنطق إلى عملية النفي. في المجموعات

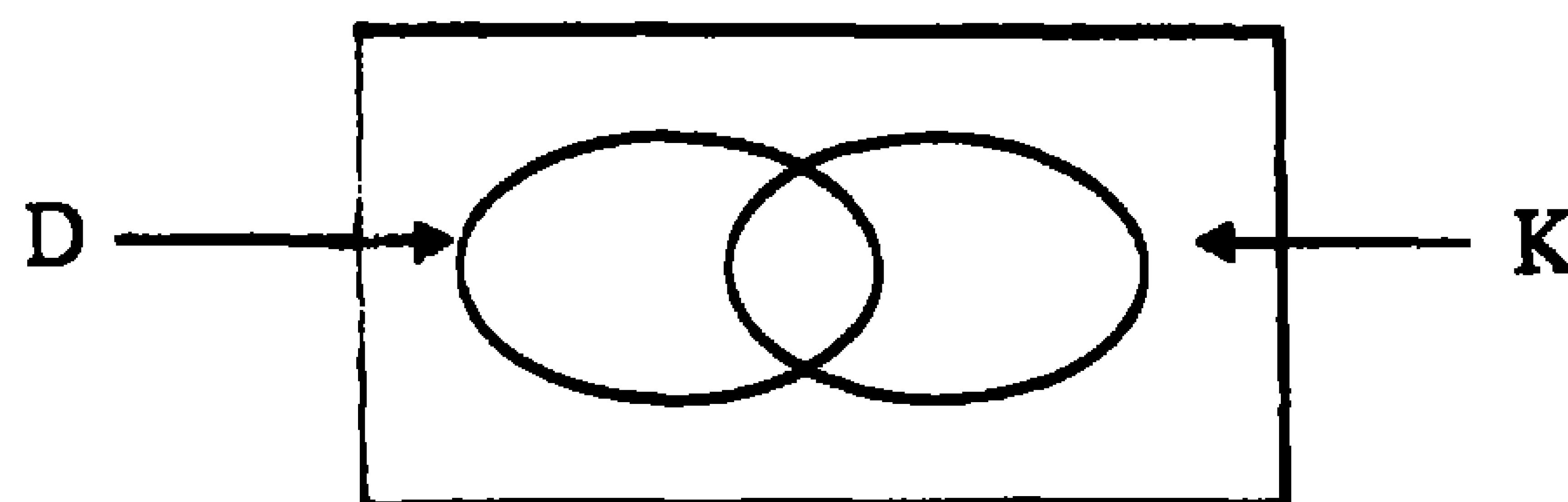
تنقلب المجموعة E إلى Q وبالعكس كما انقلبت في المنطق الفرضية الصحيحة إلى فرضية خاطئة وبالعكس عند النفي. إن التشابه لا يقف عند هذا الحد بل يتعداه إلى القانون التالي في قوانين المجموعات:

1) $\overline{D \cup K} = \overline{D} \cap \overline{K}$

2) $\overline{D \cap K} = \overline{D} \cup \overline{K}$

هذان القانون يدعيان قانون مورجان للمجموعات.

نرى أن عملية الاتحاد تلعب دور الحرف أو وعملية التقاطع تلعب دور الحرف و. حتى أنه تعرّف أحياناً عملية الاتحاد بأنها بمجموعة العناصر الموجودة في المجموعة الأولى أو الموجودة في المجموعة الثانية. كذلك تعرف أحياناً عملية التقاطع بأنها بمجموعة العناصر الموجودة في المجموعة الأولى والثانية. إن القانونسان المذكوران للمجموعات يتم إثباتهما بطريقة مختلفة عن طرق المنطق. تعتبر هنا المجموعتان D و K مجموعتان جزئيتان من مجموعة شاملة تسمى U. الرسم التالي يوضح علاقة المجموعات الثلاث فيما بينها:



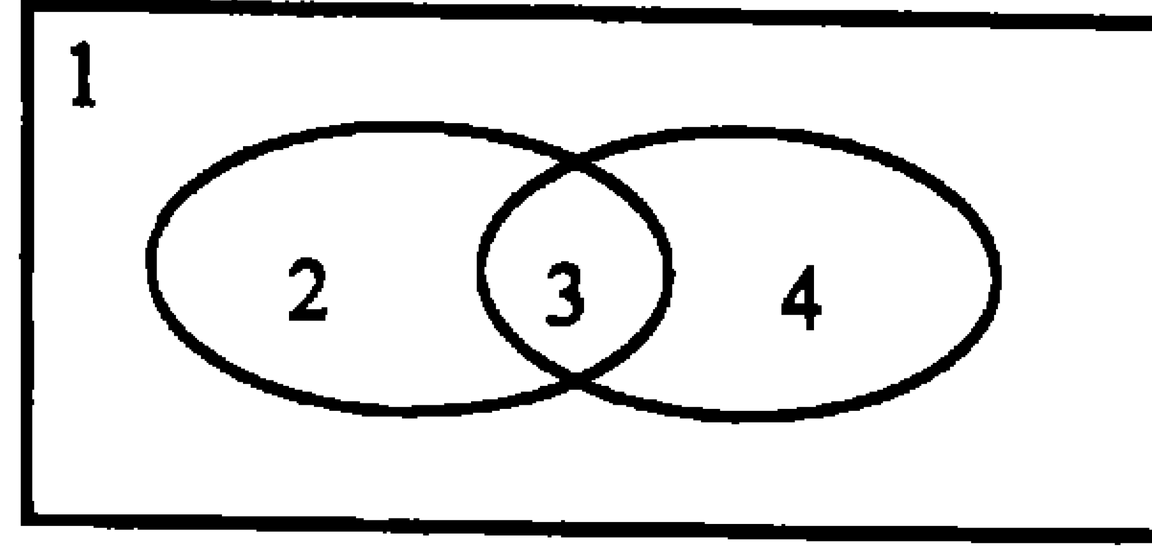
حيث يعتبر المستطيل هو المجموعة U بينما تعتبر الدائرة على اليمين (على اليسار) هي المجموعة K (المجموعة D). نلاحظ وجود منطقة مشتركة بين المجموعتين D و K حيث أن غالباً ما يكون هنالك عناصر مشتركة بين مجموعتين. عدم وجود مشترك بين D و K في بعض الحالات لا يؤثر على الإثبات البتّة. لتسهيل الأمر سنتخيل أن الشكل أعلاه مقسّم إلى أربعة مناطق بحيث نعطي كل منطقة رقم ونعتبر

U = { 1 , 2 , 3 , 4 }

D = { 2 ,3 }

$$K = \{ 3 , 4 \}$$

أي هندسياً لدينا الشكل التالي:



نجري حساباتنا الآن على الطرف الأيسر والأيمن ونقارنهما معاً. الطـــرف الأيســـر في القانون الأول يعطي

$$\overline{D \cup K} = \overline{\{ 2 , 3 , 4 \}} = \{1\}$$

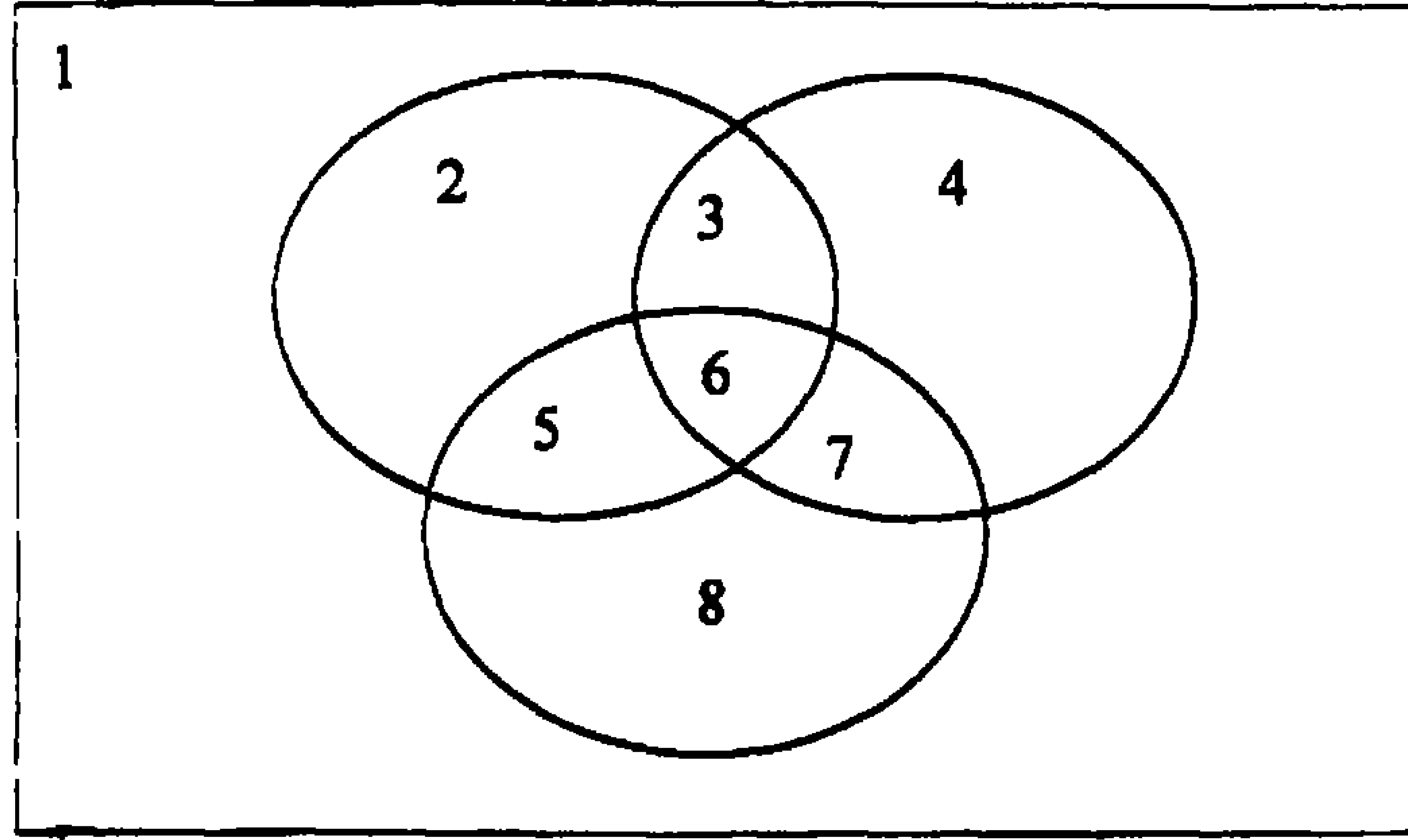
والطرف الأيمن لنفس القانون يعطي

$$\overline{D} \cap \overline{K} = \{1 , 4\} \cap \{1 , 2\} = \{1\}$$

يمكن بهذه الطريقة التثبت من صحة أو عدم صحة العديد من قوانين المجموعات الـــتي تتعلق بمجموعتين. هناك أمثلة عليها:

1) $(D - K) \cap (K - D) = \{ \}$
2) $(D \cap K) \cup (D - K) = D$
3) $D - K = D \cap \overline{K}$
4) $D - (D - K) \subset D$
5) $D \, \Delta K = (D \cup K) - (D \cap K)$
6) $\overline{D - K} \cap D = D \cap K$

لو أردنا إثبات قوانين تتعلق بثلاث مجموعات لوجب علينا تخيل كل مجموعة على صورة دائرة داخل مستطيل بحيث تتقاطع معاً كما هو موضح في الشكل التالي:



في هذه الحالة نعتبر المجموعة الأولى هي

$$X = \{2, 3, 5, 6\}$$

والمجموعة الثانية هي

$$Y = \{3, 4, 6, 7\}$$

أما المجموعة الثالثة فهي

$$Z = \{5 . 6, 7, 8\}$$

سنترك مسألة التأكد من صحة العلاقات التالية أو عدمها للطالب:

1) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$

2) $(X - Y) \cup Z = X - (Y \cup Z)$

3) $(X \cap Y) \cup \overline{Z} \subset X \cap Z$

يوجد مفهوم مهم يتعلق بتكوين مجموعة جديدة من مجموعتين عن طريق دمجهم على صورة أزواج مرتبة. بمعنى أدق لو كان لدينا مجموعتان فإننا نربط جميع عناصر المجموعة الأولى مع جميع عناصر المجموعة الثانية في أزواج بحيث يأتي العنصر في الخانة الأولى للزوج من المجموعة الأولى والعنصر في الخانة الثانية للزوج من المجموعة الثانية. يسمى هذا الدمج بالضرب الكارتيزي بين المجموعتين. مثلاً، لو كانت

$$H = \{1, 2, 3\}, \quad G = \{a, b\}$$

لحصلنا على دمج H مع G ورمزه HxG كالتالي:

$$H \times G = \{ (1, a) , (2,a) , (3,a) , (1,b) , (2,b) , (3,b)\}$$

لو عكسنا المجموعتين لتشكلت لدينا مجموعة مختلفة، أي لنتج

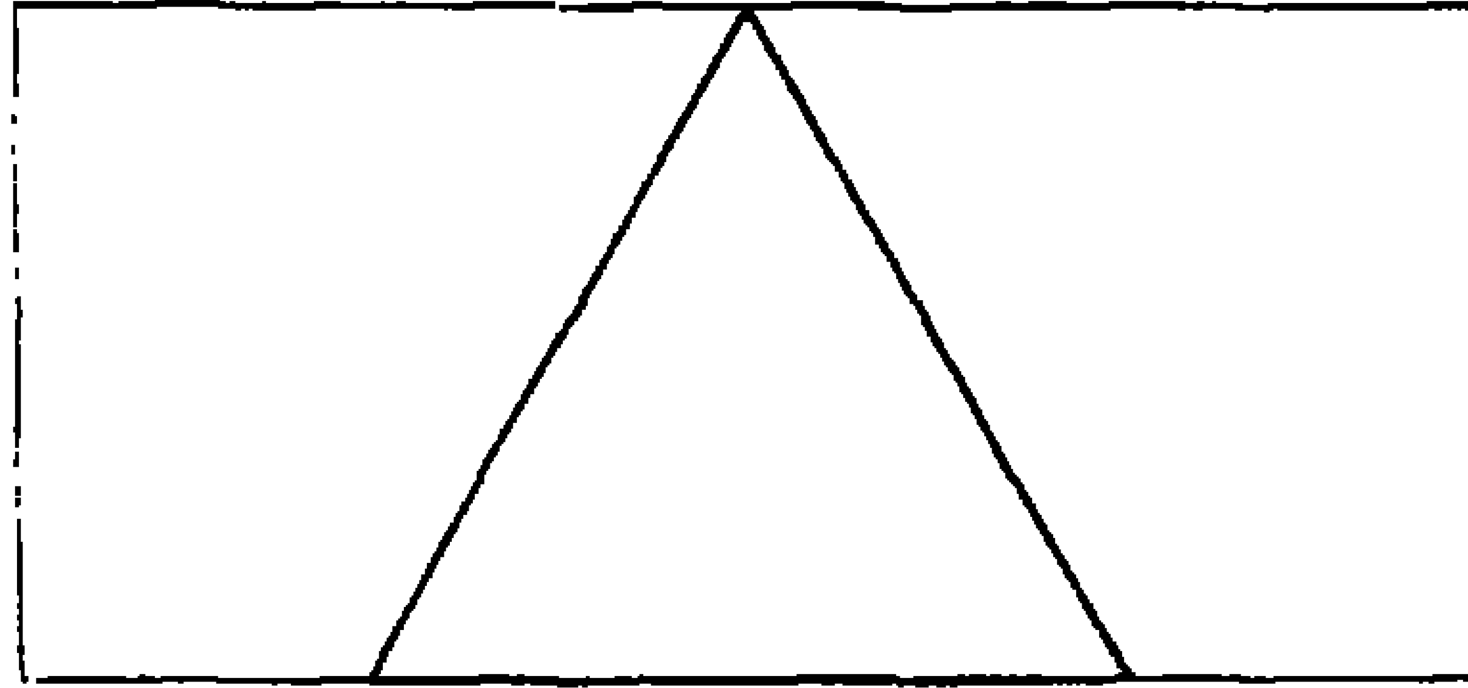
$$G \times H = \{ (a,1), (b,1) , (a,2), (b,2) , (a,3), (b,3) \}$$

لاحظ أن

$$|H \times G| = |G \times H| = |H|\ |G|$$

هذا قانون عام يصلح للضرب الكارتيزي بين أي مجموعتين.

سنتطرق لاحقاً إلى مفهوم التقسيم. هندسياً، لو كان لدينا مجموعة شاملة على صورة مربع، فإن التقسيم يعني فصل المربع إلى مناطق مختلفة غير متداخلة. مثلاً، الشكل التالي هو تقسيم المربع إلى ثلاث مناطق:



بلغة المجموعات كل منطقة تعبر عن مجموعة مستقلة، أي تقاطع كل مجموعة مع الأخريات دائماً يؤدي إلى المجموعة الخالية (لا عناصر مشتركة مع أي مجموعة أخرى). إضافة إلى هذه الصفة يجب أن يشكل اتحاد المجموعات المستقلة معاً المجموعة الأصلية (الشاملة). مثلاً، يمكن تقسيم المجموعة H إلى

$$\{1 , 2\} \ , \ \{3\}$$

طبعاً توجد تقاسيم أخرى للمجموعة H مثل التقسيم

$$\{ 1 \} , \{ 2 \} , \{3 \}$$

المجموعة IN لها التقسيم المكون من المجموعتين E و Q.

الفصل الثالث

مبدأ الجمع للمجموعات

لو كان لدينا مجموعتان ليس بين عناصرهما أي عنصر مشترك، لكان مجموع عدد عناصرهما هو عدد عناصر الأولى مضاف إليه عدد عناصر الثانية. بلغة رياضية، إذا كان لدينا مجموعتان A و B بحيث أن

$$A \cap B = \{ \}$$

فإنه ينتج من ذلك

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

ماذا يحدث لو كان هنالك عناصر مشتركة بين المجموعتين؟ لنقل أن عدد عناصر الأولى هو أ + ب حيث ب عدد العناصر المشتركة و أ عدد عناصر غير المشتركة مع المجموعة الأخرى. لنقل أن عدد العناصر الموجودة في المجموعة الثانية وليست في المجموعة الأولى هو جـ. إذاً، عدد عناصر المجموعة الثانية هو ب + جـ. عندما نأخذ مجموعة الاتحاد، فإن العناصر المشتركة تتم كتابتها مرة واحدة فقط وليس مرتين. بمعنى آخر عدد العناصر في مجموعة الاتحاد هو أ + ب + جـ. نخلص من الشرح السابق إلى القانون العام لاتحاد مجموعتين:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

يسمى هذا القانون بمبدأ الجمع لمجموعتين بحيث يتم تحويل الاتحاد إلى تقاطع. يمكن تعميم هذا القانون لثلاث مجموعات باستخدام مبدأ الجمع لمجموعتين سنقوم الآن باشتقاق القانون الثلاثي:

$$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C|$$

سنعتبر مجموعة الاتحاد بين قوسين مجموعة واحدة ونطبق مبدأ الجمع على مجموعة الاتحاد مع المجموعة C، فينتج

$$|(A\cup B)| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$$

سنستبدل العدد الأول باستخدام مبدأ الجمع لمجموعتين بعملية تقاطع، أي

$$|A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$$

سنعالج الكمية الأخيرة بشكل منفرد، ثم نعود فنعوض للحصول على الجواب النهائي.

سنستخدم للكمية الأخيرة مبدأ التوزيع أي

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

يوجد لدينا الآن اتحاد مجموعتي تقاطع. نطبق مبدأ لجمع مجدداً لهاتين المجموعتين فينتج

$$|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|$$

بما أن التقاطع توزيعي على نفسه، يكون المقدار الأخير مساوٍ للمقدار

$$|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

عند التعويض نحصل على الجواب النهائي التالي:

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| -$$
$$|A\cap C| - |B\cap C| + |A \cap B \cap C|$$

لاحظ أن المجموعات تأتي أولاً فرادى بإشارة موجب، ثم تأتي ثانياً على شكل ثنائيات بإشارة سالب، وأخيراً تأتي بصورة تقاطع ثلاثي بإشارة موجب. سنكتشف تقلب الإشارة على هذا النمط لاحقاً في اتحاد رباعي، ويمكن الإثبات باستخدام الاستقراء الرياضي أنه قانون عام لاتحاد عدد من المجموعات. سنوجز إثبات الاتحاد الرباعي على صورة معادلات متتابعة لأن مبدأ الإثبات هو نفس المبدأ الذي اتبعناه سابقاً. هاك الإثبات:

$$|A \cup B \cup C \cup D| =$$
$$|(A \cup B \cup C) \cup D| =$$
$$|A \cup B \cup C| + |D| - |(A \cup B \cup C) \cap D| =$$
$$|A| + |B| + |C| - |A\cap B| -$$

$|A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| +$
$|D| - |(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)| =$
$|A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| -$
$|A \cap C| - |B \cap C| +$
$|A \cap B \cap C| - [|A \cap D| +$
$|B \cap D| + |C \cap D| -$
$|A \cap B \cap D| - |A \cap C \cap D| -$
$|B \cap C \cap D| + |A \cap B \cap C \cap D|] =$
$|A| + |B| + |C| + |D| -$
$|A \cap B| - |A \cap C| \; |A \cap D| -$
$|B \cap C| - |B \cap D| -$
$|C \cap D| + |A \cap B \cap C| +$
$|A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| +$
$|B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$

توجد بعض التطبيقات العملية لمبدأ الجمع. لبيان ذلك سنورد المثالين التاليين:

مثـــال:

توجد لدينا مجموعة من الطلبة تقدم جزء منهم لامتحان الرياضيات. بلغ تعـــداد هؤلاء الطلبة ٢٥، بينما تقدم لامتحان الفيزياء ١٠ طلاب. إذا علمت أن عدد الطلبـة الذين تقدموا لامتحاني الرياضيات والفيزياء كان خمسة، فما هو عدد الطلاب الكلي؟

الحـــل:

سنعتبر المجموعة A هي مجموعة الطلبة الذين تقدموا لامتحان الرياضيات، ونعتـــبر المجموعة B هي مجموعة الطلبة الذين تقدموا لامتحان الفيزياء. يمكـــن الآن تلخيـــص المعطيات كالتالي:

$|A| = 25, |B| = 10,$
$|A \cap B| = 5.$

نحن نريد حساب $|A \cup B|$. حسب مبدأ الجمع يكون الجواب

$$|A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 10 - 5 = 30$$

مثـــال:

كانت لدينا عينة من 120 طالباً، أجرينا عليها عملية استفتائية. كـــان الســـؤال المطروح في الاستبيان: ضع علامة أمام المادة التي تفضلها من بين الرياضيات والفيزيـاء والكيمياء (يسمح للطالب بأن يضع علامة أمام أكثر من مادة). بعد فرز النتائج تبـــين أن:

- 100 طالب اختاروا الرياضيات كمادة مفضلة.
- 35 طالب اختاروا الفيزياء كمادة مفضلة.
- 30 طالب اختاروا الكيمياء كمادة مفضلة.
- 15 اختاروا الرياضيات والفيزياء كمادتين مفضلتين.
- 15 طالب اختاروا الرياضيات والكيمياء كمادتين مفضلتين.
- 20 طالب اختاروا الفيزياء والكيمياء كمادتين مفضلتين.

ما هو عدد الطلبة الذين اختاروا المواد الثلاثة كمواد مفضلة؟

الحـــل:

لنعتبر أن A هي مجموعة الطلبة التي وضعت علامة أمام الرياضيـــات، و B هـــي مجموعة الطلبة التي وضعت علامة أمام الفيزياء، و C هي مجموعة الطلبة التي وضعـــت علامة أمام الكيمياء. تتحول المعطيات في نص المثال إلى الأرقام التالية:

$$|A| = 100,\ |B| = 35,$$
$$|C| = 30,\ |A \cap B| = 15,$$
$$|A \cap C| = 15,\ |B \cap C| = 20$$

حسب مبدأ الجمع لثلاث مجموعات ينتج

$$|A \cup B \cup C| = 120 =$$
$$100 + 35 + 30 - 15 - 15 - 20 + |A \cap B \cap C|$$

وبالتالي نحصل على

$$|A \cap B \cap C| = 120 - 115 = 5$$

أي خمسة طلبة تفضل المواد الثلاثة.

مثـــال: عند إجراء إحصائية على 260 طالب جامعي تبين أن:

- 64 درسوا رياضيات.
- 94 درسوا فيزياء.
- 58 درسوا كيمياء.
- 28 درسوا رياضيات وكيمياء.
- 26 درسوا رياضيات وفيزياء.
- 22 درسوا فيزياء وكيمياء.
- 14 درسوا رياضيات وفيزياء وكيمياء.

ما هو عدد الطلبة الذين لم يدرسوا أياً من المواد الثلاث؟

كم عدد الطلبة الذين درسوا فيزياء فقط؟

الحل:

حسب مبدأ الجمع عدد الطلبة الذين درسوا أياً من المواد الثلاث هم 154 ، ولذا العدد المطلوب هو 106.

عدد الطلبة الذين درسوا فيزياء فقط هو عدد الذين درسوا فيزياء مطروح منـــه عدد الذين درسوا فيزياء ورياضيات ومطروحٌ منه عدد الذين درسوا فيزياء وكيميـــاء مضافٌ إليه عدد الذين درسوا المواد الثلاث أي

$$94 - 26 - 22 + 14 = 60$$

الفصل الرابع

مفهوم العلاقة

العلاقة في الرياضيات هي مجموعة جزئية من مجموعة الضرب الكارتيزي بين مجموعة أولى مع مجموعة ثانية. يقال في هذه الحالة أن العلاقة تربط المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية. لتشبيه هذا المفهوم مع العلاقات الإنسانية في الحياة العملية سنضرب المثل التالي: إذا كانت المجموعة الأولى هي مجموعة رجال بلد ما والمجموعة الثانية هي مجموعة نساء البلد نفسه. إن مجموعة الضرب الكارتيزي للمجموعتين هي مجموعة الثنائيات التي تشير إلى رجل واحد وامرأة واحدة. يمكن تعريف علاقة الزواج بأنها العلاقة التي تربط رجل ما مع امرأة ما إذا كانا متزوجين. يكون هذا التعريف بمثابة تحديد لعدد من الثنائيات رجل/ امرأة بحيث يكون الرجل هو زوج المرأة التي كانت معه في الثنائي. ويقال بأن علاقة الزواج تربط الرجل مع المرأة في كل ثنائي من الثنائيات التي تم اختيارها. يمكن تعريف علاقة أخرى تمثل تحديداً مختلفاً وجزءاً مختلفاً من مجموعة كل الثنائيات، وهي علاقة الأبوة. أي تشمل هذه العلاقة على جميع الثنائيات التي يكون فيها الرجل هو أب للمرأة التي كانت معه في الثنائي.

نعود للمفهوم الرياضي ونأخذ مثلاً كمجموعة الأولى

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

ونأخذ كمجموعة ثانية

$$B = \{2, 4, 6\}$$

مجموعة الضرب الكارتيزي تحتوي على 12 زوجاً مرتباً. سنعرّف العلاقة صغير بمعنى أن العدد الأول في الزوج المرتب يرتبط مع العدد الثاني في نفس الزوج إذا كان العدد

الأول أصغر من الثاني. نكون بالتالي قد قمنا بتحديد أو اختيار الأزواج الثمانية التالية داخل علاقة صغير:

$$(1,2), (1,4), (1,6), (2,4), (2,6), (3,4), (3,6), (4,6)$$

سنرمز في العادة للعلاقة بالرمز R، ونعبّر عن طريقة الارتباط داخل R بالرموز الرياضية. ففي المثال السابق يقال أن:

$$R = \{ (x,y) \in A \times B : x < y\}$$

وأحياناً تستخدم الطريقة التالية بدل استخدام رمز المجموعة بحيث نختار فيها الأزواج بالكيفية المبينة:

$$x R y \Leftrightarrow x < y$$

حيث يفهم ضمنياً أن x يأتي من A و y يأتي من B.

<u>مثـال:</u> لتكن لدينا المجموعتان

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$C = \{1, 4, 8, 16\}$$

سنعرف علاقة تربيع تربط بين عناصر A مع عناصر C. بحيث يكون تربيع العنصر من A يساوي قيمة العنصر من C. بالرموز، سنطلب أن

$$x R y \Leftrightarrow x^2 = y$$

يكن بسهولة التحقق من أن

$$R = \{ (1,1), (2,4), (4,16)\}$$

<u>مثـال:</u> لتكن لدينا المجموعة

$$D = \{ 1, 2, 3, 5\}$$

سنعرف علاقة زوجي كالتالي:

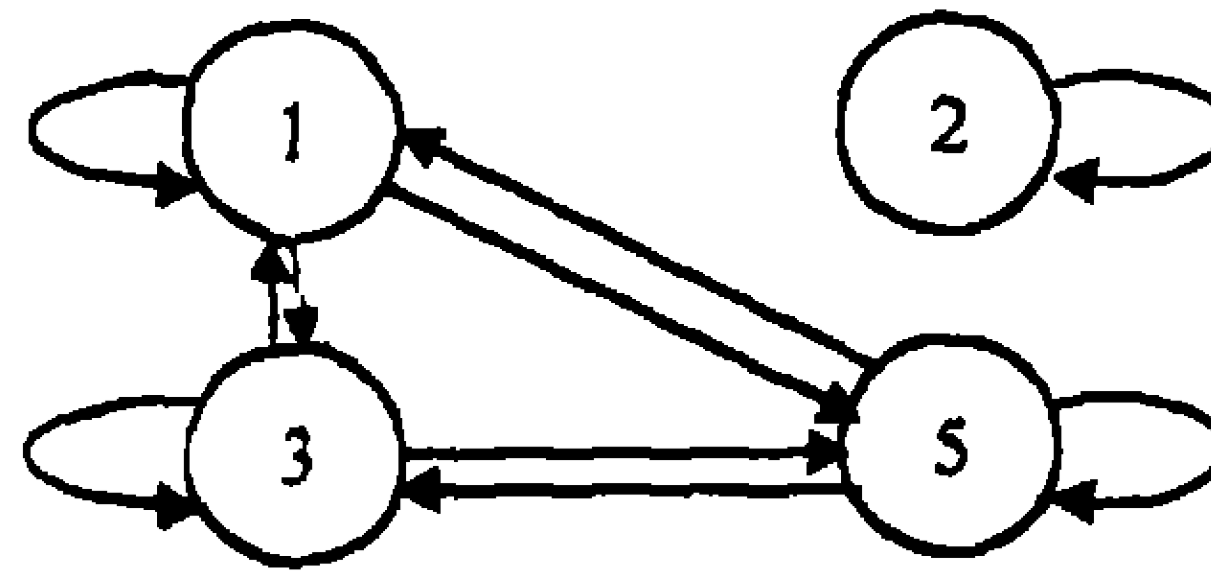
$$R = \{ (x, y) \in D \times D : x - y \text{ even}\}$$

لاحظ أن العلاقة الآن تربط المجموعة D مع نفسها. يقال في هكذا حالة بأن العلاقة

زوجي معرّفة على المجموعة D. بما أن الأعداد الزوجة هي المضاعفات الموجبة والسالبة للعدد 2 بالإضافة إلى العدد صفر، ينتج

R ={(1,!), (1,3), (1,5), (2,2), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)}

يتم تمثيل العلاقات المعرفة على مجموعة من خلال رسم يدعى لشبكة الموجهة. بمعنى أن يرسم كل عنصر من عناصر المجموعة في دائرة ثم نرسم أسهم تصدر من دائرة وتنتهي بدائرة أخرى إذا كان العنصر في الدائرة الأولى يرتبط مع العنصر في الدائرة الثانية. مثلاً، لو أردنا رسم العلاقة زوجي لحصلنا على الشكل



لاحظ أن الأسهم الانعكاسية تدل على ارتباط العنصر مع نفسه.

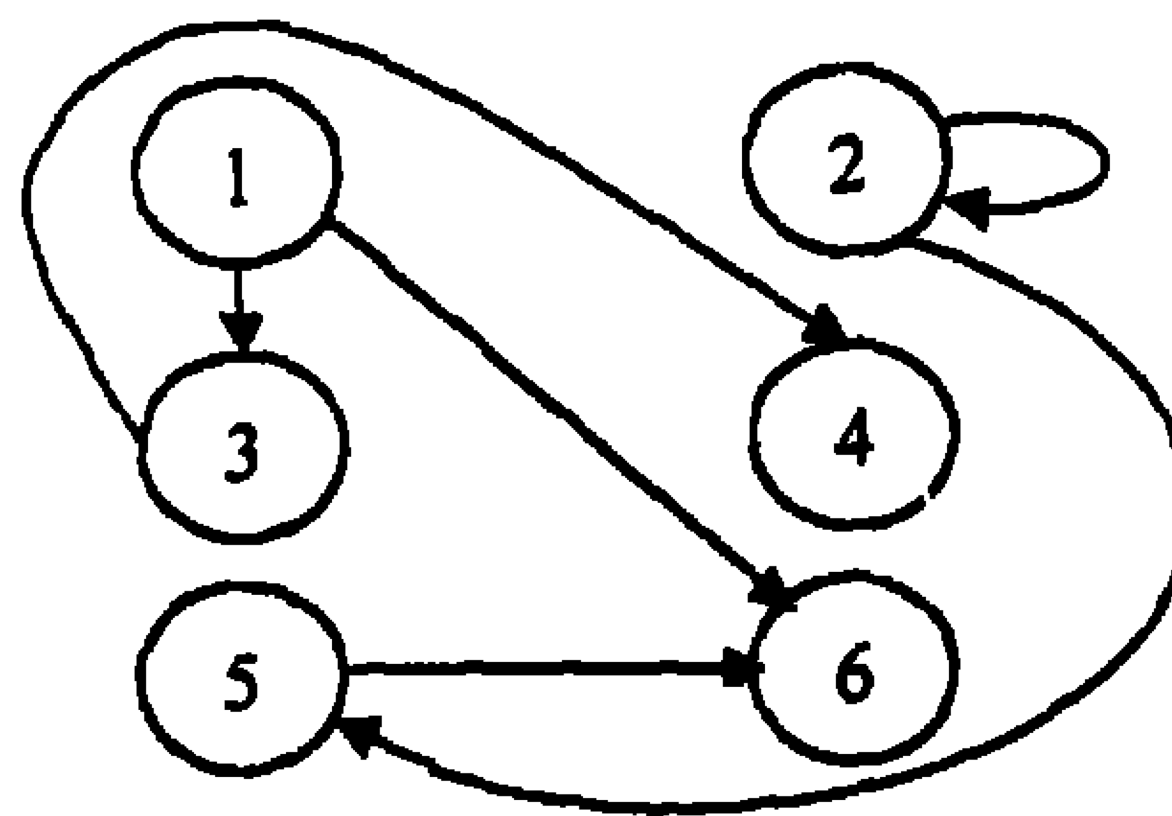
<u>مثـــال</u>: لتكن لدينا المجموعة

E = { 1 ,2 ,3 , 4 , 5 , 6 }

ولتكن العلاقة R معرفة على E على أنها المجموعة الجزئية التالية من المجموعة ExE:

{(1,3) , (1,6) , (2,2) , (2,5) , (3,4) , (5,6)}

الشبكة الموجهة التي تمثل R هي الشكل



لاحظ وجود سهم انعكاسي واحد فقط في الشبكة.

1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = A$

$xRy \Leftrightarrow x + y = 7$

2) $A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$

$B = A$

$(u, w) R (a,b) \Leftrightarrow ub = aw$

الفصل الخامس

صفات العلاقات

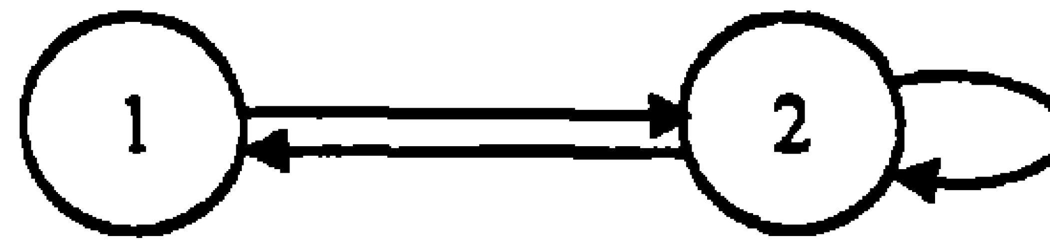
توجد عدة صفات تميز بعض العلاقات عن بعضها البعض. سنستخدم لشرح كل صفة طريقة التعريف الهندسي والتعريف الجبري. لنبـــــدأ بالصفـــة الأبســـط وهـــي الانعكاسية. كما يوحي الاسم تعني هذه الصفة أن تكون جميع الدوائـــر في الشـــبكة الموجهة المنبثقة عن العلاقة لها أسهم انعكاسية. التعريف الجبري للانعكاسية يكون بالرموز

$$x R x \quad , \quad \forall x \in A$$

بمعنى أن كل عنصر من عناصر المجموعة (التي تعرف العلاقة عليها) يرتبط مع نفســـــه. كمثال بسيط، العلاقة ذات الشبكة الموجهة التالية:



علاقة انعكاسية. أما العلاقة ذات الشبكة الموجهة التالية:



فهي علاقة غير انعكاسية لأن العنصر 1 لم يرتبط مع نفسه. يعتبر العنصـــــــر 1 مثـــالاً مناقضاً لجملة لكل الواردة في التعريف الجبري.

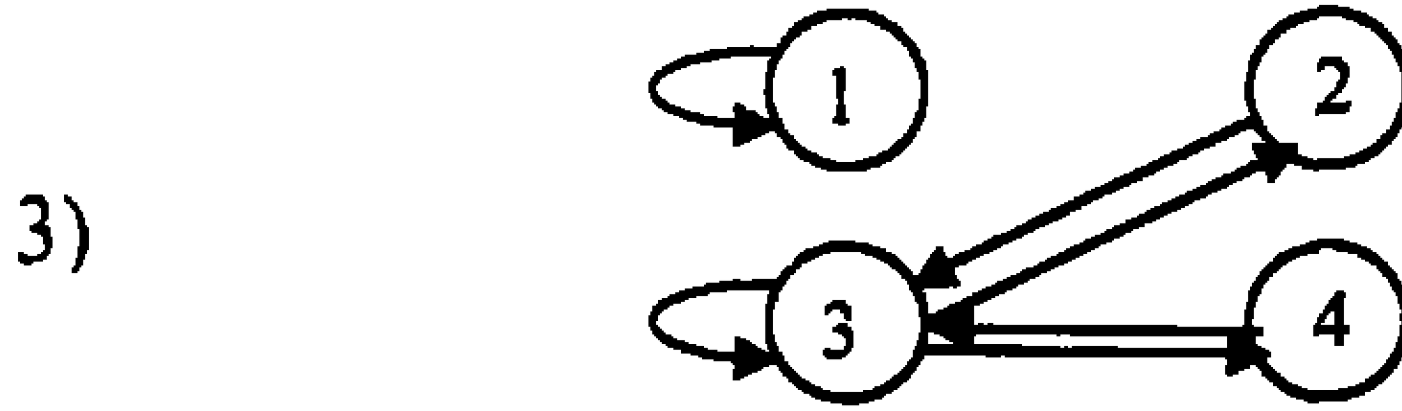
الصفة الثانية هي صفة تستخدم مبدأ الجملة الشرطية. تدعى هذه الصفـــة صفـــة التماثل وتقول بوجوب أن يكون مقابل كل سهم ذاهب من دائـــرة أولى إلى دائـــرة ثانية (تختلف عن الأولى) هنالك سهم عائد بالاتجاه المعاكس. أي إذا كـــان هنـــالك سهم ذاهب، فإنه يوجد سهم عائد. بالرموز تعرّف الصفة

$$x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x,\; x \neq y$$

لاحظ أن التعريفان لا يتحدثان عن ضرورة ارتباط كل عنصر من A مع عنصر آخر مختلف في اتجاهين أو حتى اتجاه واحد، وإنما تتحدث عن ضرورة وجود اتجاهين في الأسهم إذا كانت الدائرتان مرتبطتان معاً. هاك أمثلة على علاقات لها صفة التماثلية:

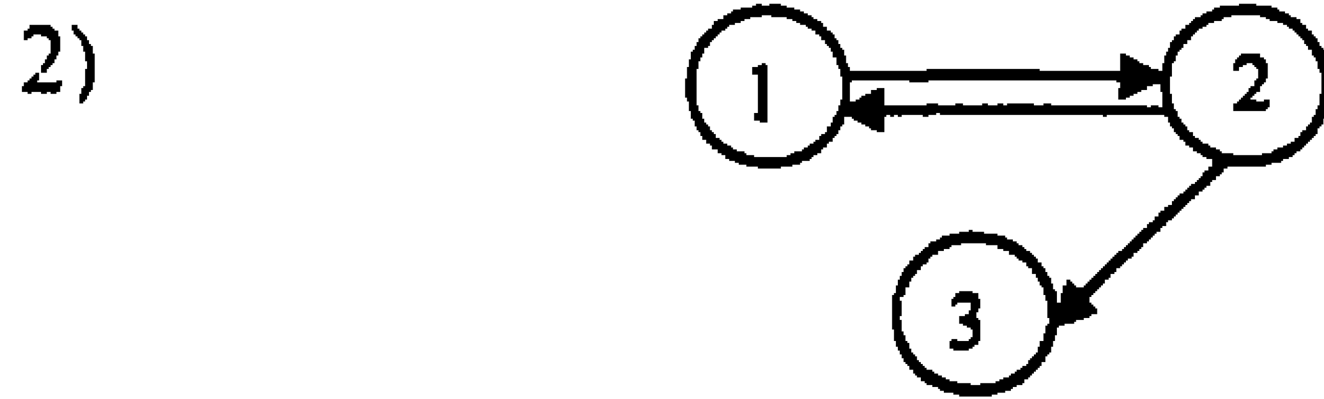


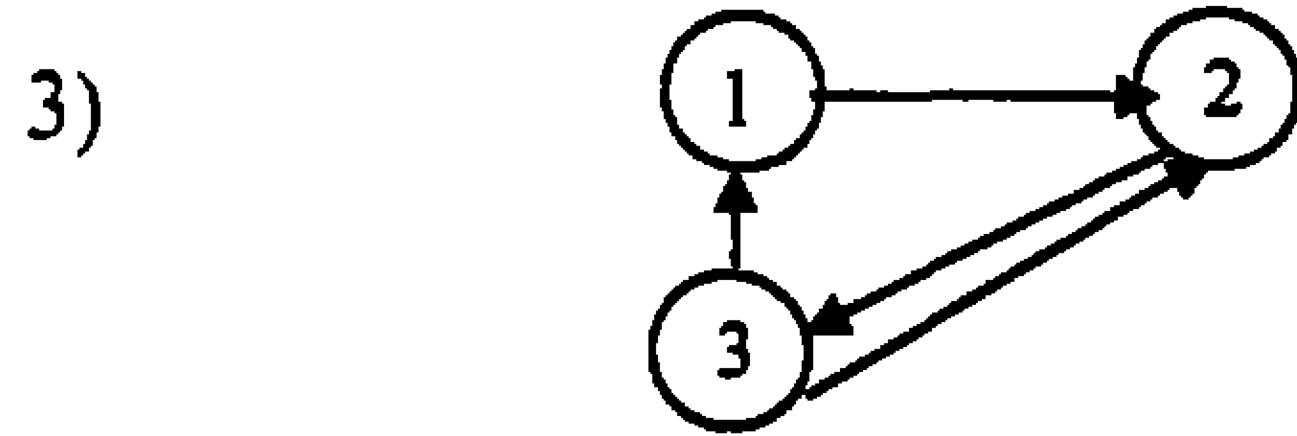




وهاك أمثلة على علاقات تفتقر إلى هذه الصفة:







توجد صفة مشابهة لصفة التماثل، لكنها ليست التماثل أو نفي التماثل. تدعى هذه الصفة بصفة اللا تماثل. هذه الصفة لا تعني أن العلاقة غير متماثلة مما يعني نفي صفة التماثل، حيث توجد علاقات فيها هاتين الصفتان معاً وتوجد علاقات أخرى لا توجد فيها أيٌّ من هاتين الصفتين. المقطع لا يضاف على تعريف التماثل بحيث يصبح

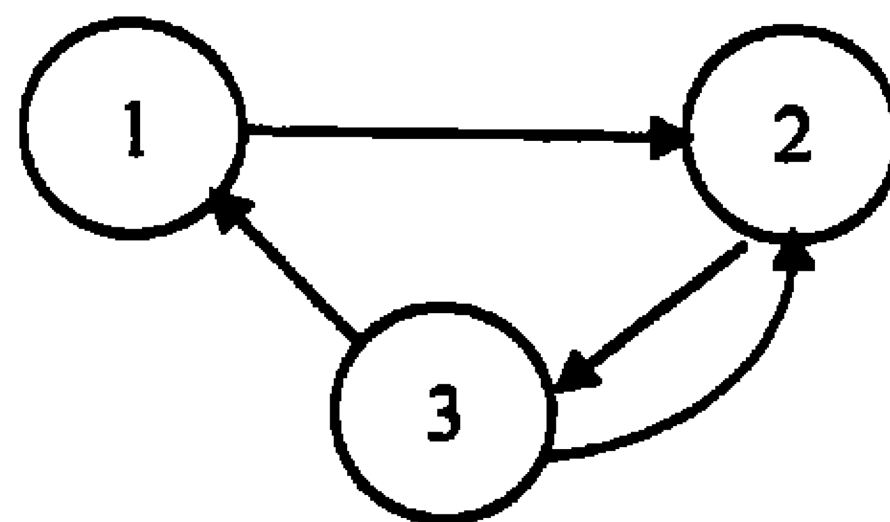
تعريف اللاتماثل كالتالي: مقابل كل سهم ذاهب من دائرة إلى أخرى لا يوجد سهم عائد. أي إذا كان هنالك سهم ذاهب، فإنه لا يوجد سهم عائد. كمثال بسيط على اللاتماثل لننظر إلى



الأسهم الانعكاسية لا تعتبر مشكلة لأن الأسهم الذاهبة والعائدة تكون بين دوائر مختلفة. في هذه الشبكة سهم واحد ذاهب ولا يوجد سهم عائد في الاتجاه المعاكس. لذا الشبكة تمثل علاقة لا متماثلة. كذلك الشبكة التالية:



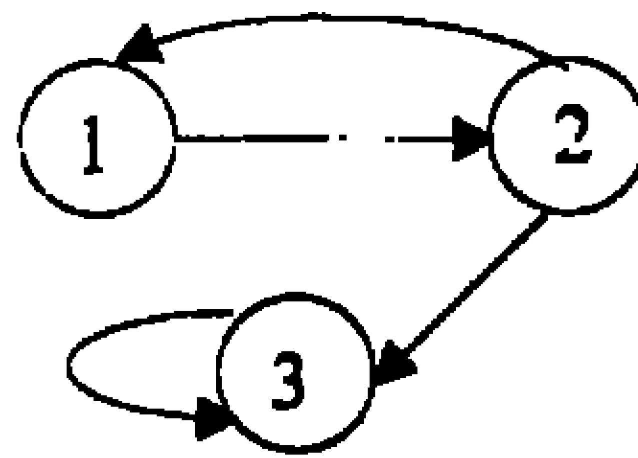
تمثل علاقة لا متماثلة لأنه لا يوجد أسهم ذاهبة أصلاً حتى نتسائل عن وجود أو عدم وجود الأسهم العائدة. جملة إذا المستخدمة في التعريف لا تشترط وجود أية أسهم وإنما تطلب فقط في حال توافرها أن تكون موجهة في اتجاه وليس في اتجاهين. الشبكة الأخيرة هي مثال على شبكة تحمل الصفتين تماثل ولا تماثل. الشبكة التالية لا تحمل أياً من الصفتين سواء تماثل أو لا تماثل:



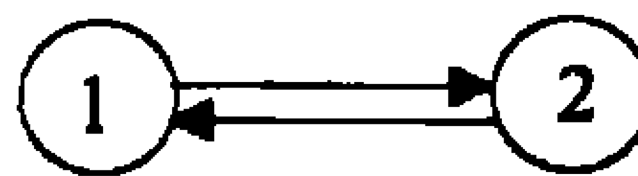
سبب عدم كونها متماثلة هو أن السهم الذاهب من الدائرة 1 إلى الدائرة 2 لم يعد. وسبب عدم كونها لا متماثلة أن السهم الذاهب من الدائرة 2 إلى الدائرة 3 عاد.

الأمثلة التالية هي أيضاً أمثلة لعلاقات لا تحمل صفة اللا تماثل:

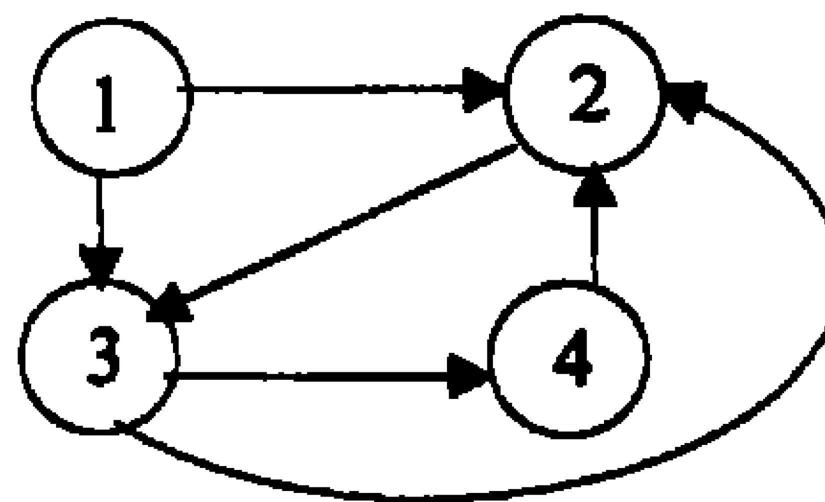
1)



2)

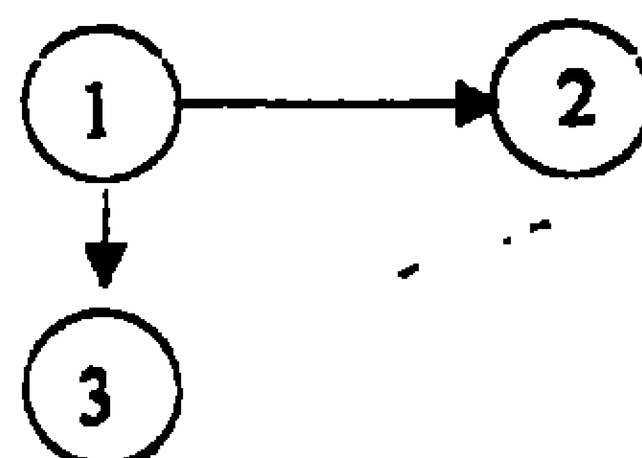


3)

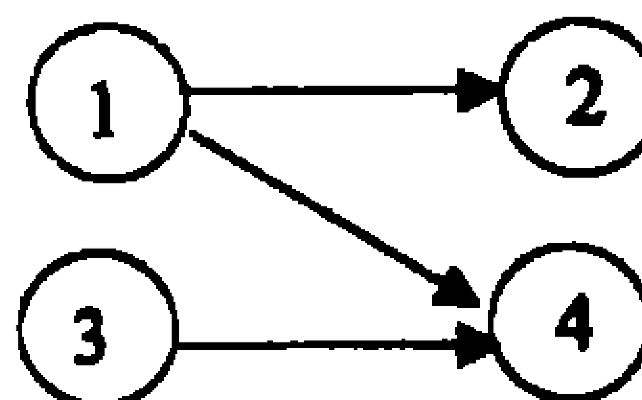


بينما الأمثلة التالية تمثل علاقات لا متماثلة:

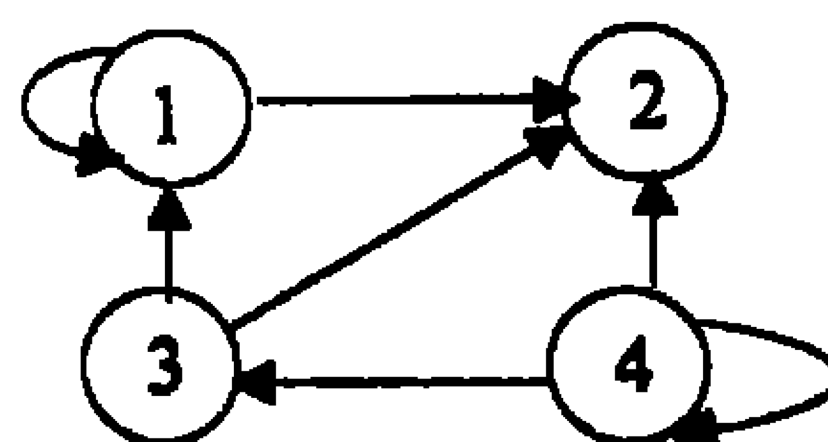
1)



2)



3)



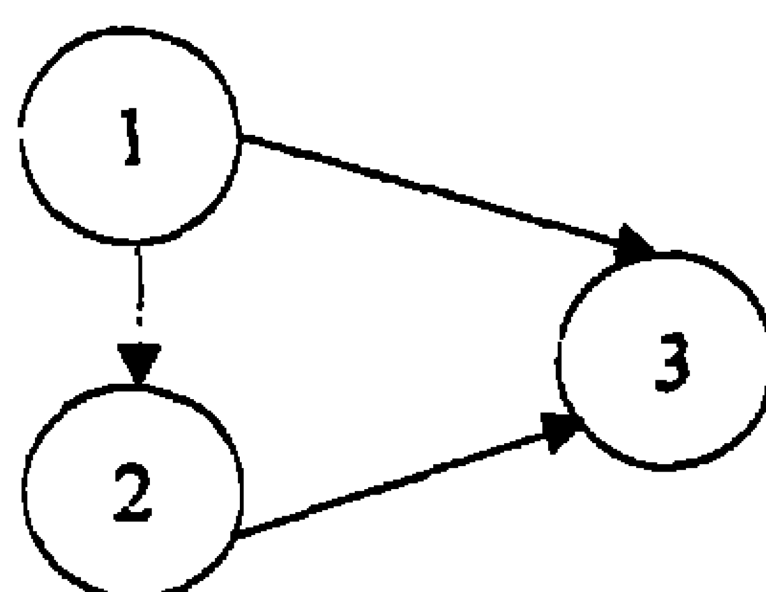
أخيرا، نكتب التعريف الجبري لصفة لا متماثل:

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R\ ,\ x \neq y$$

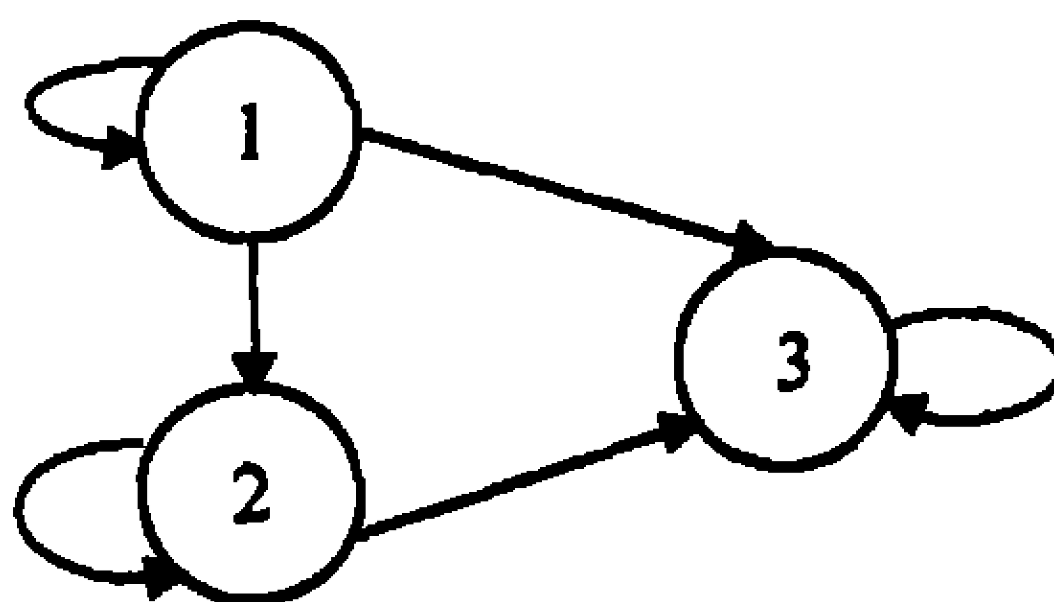
الصفة الأخيرة التي سنهتم بها هي الأصعب. يمكن إطلاق اسمان على هذه الصفة إما التعدي أو الانتقالية. بلغة الجبر تعرّف الصفة كالتالي:

$$x R y, y R z \Rightarrow x R z, x \neq y, y \neq z$$

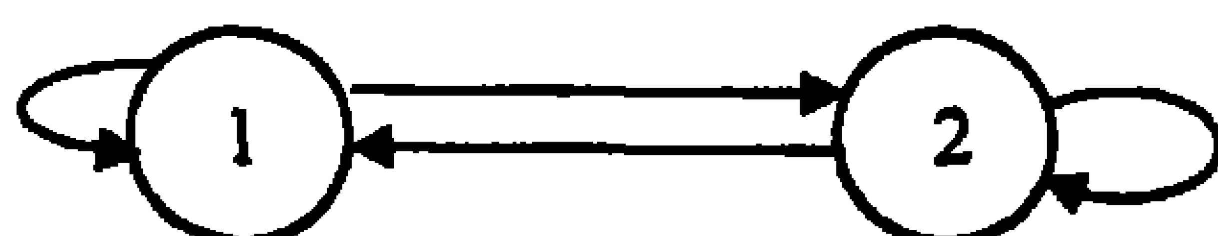
بالمعنى الهندسي إذا كان هنالك سهم ذاهب من دائرة أولى إلى دائرة ثانية وهنالك سهم من الدائرة الثانية إلى دائرة ثالثة (قد تكون هي الدائرة الأولى أو دائرة جديدة) فلا بد من وجود سهم ذاهب من المدينة الأولى إلى المدينة الثالثة بشكل مباشر. بمعنى آخر تكون أي رحلة من مدينة إلى مدينة عبر مدينة مختلفة (كمحطة استراحة) لها اختصاراً مباشراً بحيث نسلك نفس المسار في طريق دون توقف. يدعى المسار الذي نسلكه عبر الدائرة الثانية بالانتقال ويدعى السهم المنطلق من الدائرة الأولى إلى الثالثة (الطريق المباشر) بالاختصار. تأخذ الآن صفة الانتقالية المعنى أنه إذا وجد انتقال، فإنه يوجد اختصار لهذا الانتقال. ابسط مثال على هذا المفهوم هو شكل المثلث أي



يوجد انتقال وحيد في الشبكة وهو الطريق من الدائرة 1 إلى الدائرة 3 عبر الدائرة 2 . اختصار هذا الانتقال أي الطريق المباشر من الدائرة 1 إلى الدائرة 3 موجود في الشبكة. لذا الشبكة تمثل علاقة انتقالية. على نفس المبدأ يمكن القول أن الشبكة



هي شبكة لعلاقة انتقالية حيث أن الأسهم الانعكاسية لا تضيف أية انتقالات جديـــدة داخل الشبكة. لكن، في الشبكة التالية:

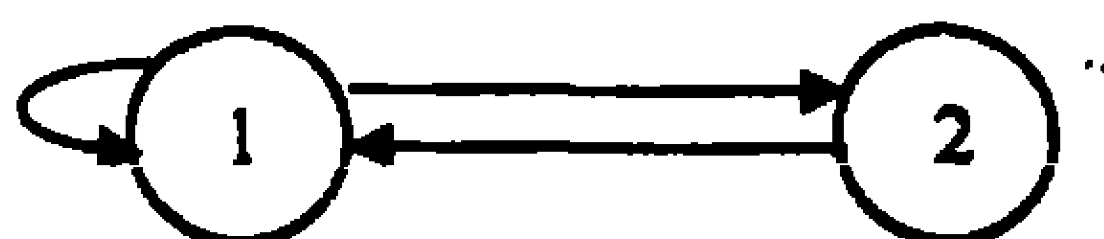


يوجد انتقالان وهما:

من دائرة 1 إلى دائرة 2 إلى دائرة 1

من دائرة 2 إلى دائرة 1 إلى دائرة 2

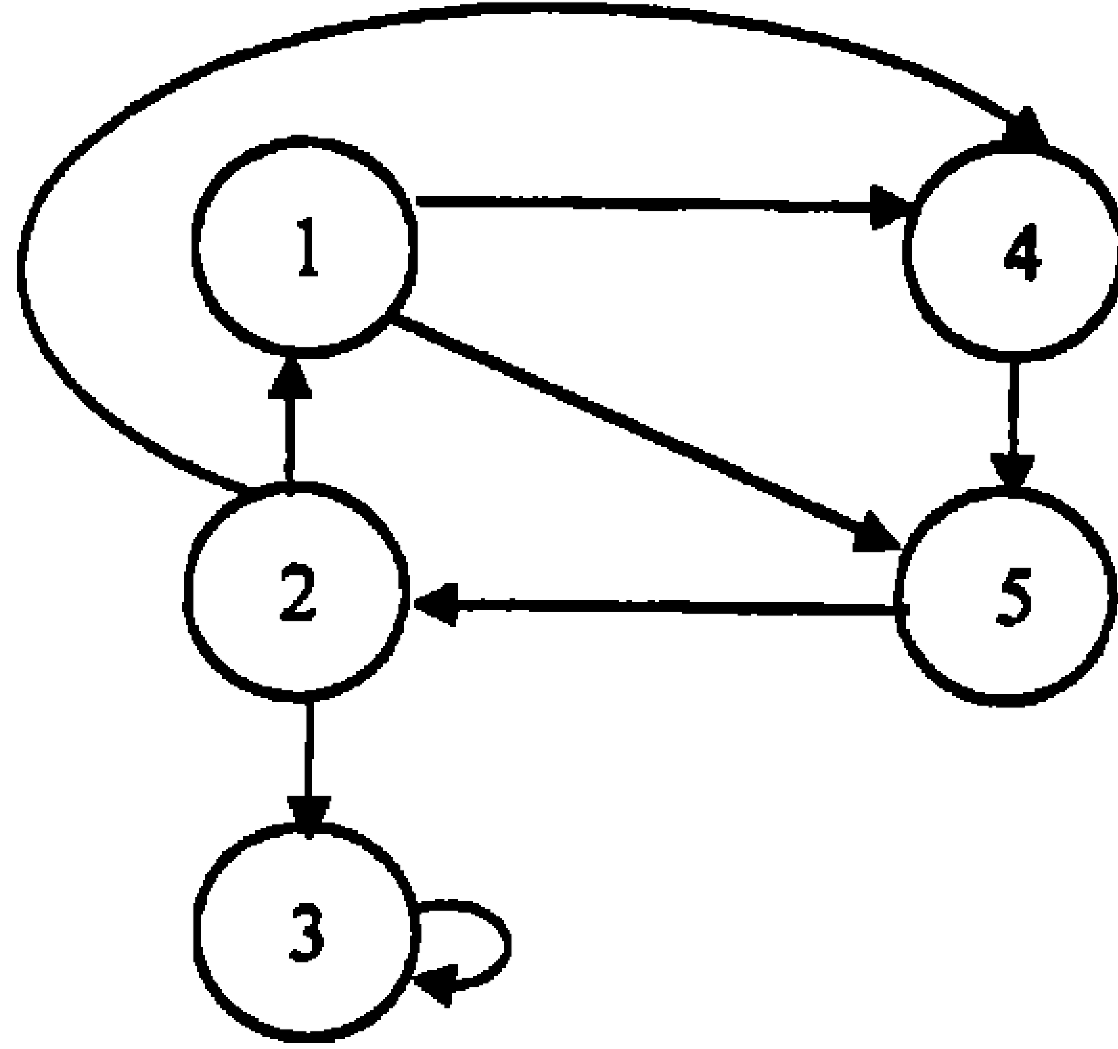
اختصار هذين الانتقالين هما السهمان الانعكاسيان. بما أن هذان السهمان موجـــودان إذن تكون الشبكة شبكة لعلاقة انتقالية. وعلى غرار ذلك يمكن الحكم على الشبكة



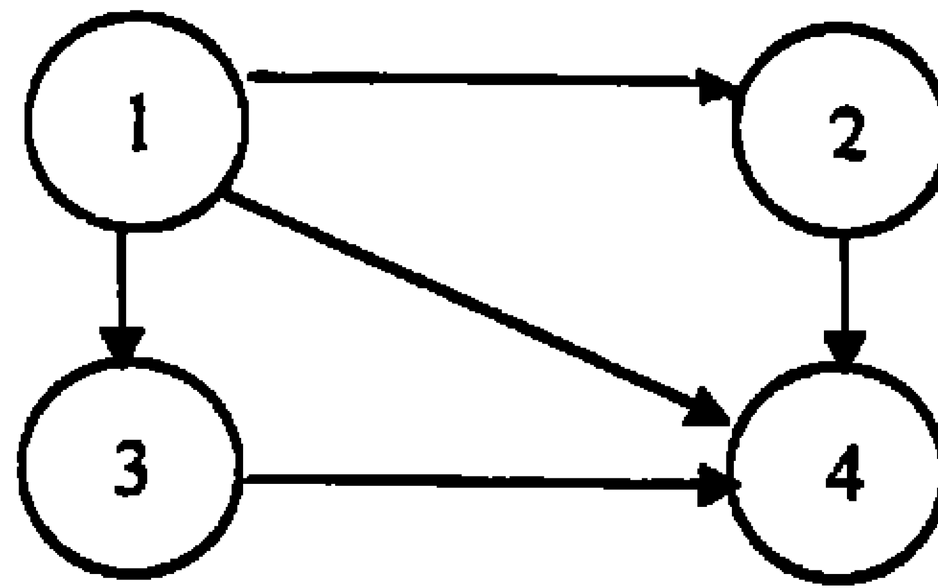
بأنها شبكة لعلاقة غير انتقالية لأن الانتقال من الدائرة 2 وإليها عبر الدائرة 1 لا يوجـــد له اختصار مباشر. تذكر أن صفة الانتقالية هي صفة تستخدم جملة شـــرطية بحيـــث تحتوي مقدمة الشرط على مطلب وجود سهمين وجواب الشرط على مطلب وجـــود السهم المباشر. إن عدم تحقق مقدمة الشرط لا يستدعي تحقق أو عدم تحقق جـــواب الشرط. بمعنى آخر العلاقة غير الانتقالية هي العلاقة التي نبحـــث في شـــبكتها عـــن انتقالات لا يوجد لها اختصار. فمثلاً،



شبكة لعلاقة انتقالية بسبب عدم وجود أية انتقالات. أي لا يوجد مـــبرر لنـــا لكـــي نعتبرها غير انتقالية، بينما في الشبكة



يوجد الانتقال من الدائرة 2 إلى الدائرة 4 ثم الدائرة 5. الاختصار لهـذا الانتقـال أي السهم من الدائرة 2 إلى الدائرة 5 غير موجود وإنما معكوسه هو السهم الموجود. هـذا سبب كافٍ لنـزع صفة الانتقالية من علاقة الشبكة، والقول بأنها علاقة غير انتقاليـة. لاحظ أنه كانت هنالك انتقالات أخرى لها اختصارات مثل الانتقال من الدائـرة 2 إلى الدائرة 4 عبر الدائرة 1. لكن، وجود انتقال واحد دون اختصار يكفي لنفي الصفة. لو نظرنا إلى الشبكة التالية:

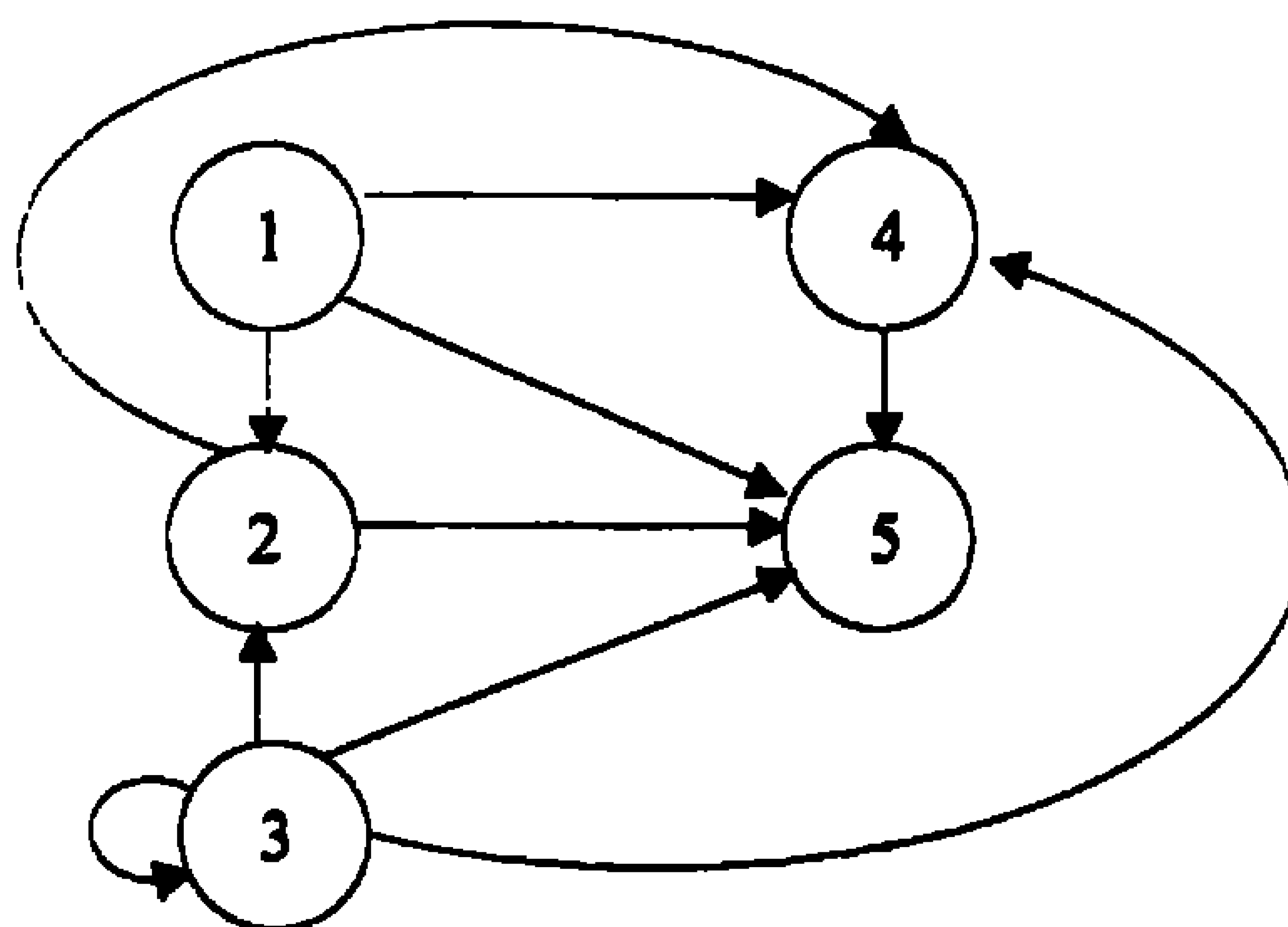


لاكتشفنا وجود انتقالين. يوجد اختصار لكلٍ من الانتقالين ولذلك الشبكة تمثّل علاقـة انتقالية. يعبر عن هذا الكلام أحياناً بالرموز كما يلي:

(صحيح) $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 : 1 \rightarrow 4$

(صحيح) $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 : 1 \rightarrow 4$

لاحظ أننا رتبنا الانتقالين بحيث نتعامل معهما وكأنها كلمتين يتم ترتيبـهما حسب الأبجدية في القاموس. كمثال آخر سننظر إلى الشبكة التالية:



الانتقالات مرتبة بشكل تصاعدي هي:

(صحيح) 1 → 4 : 4 → 2 → 1

(صحيح) 1→5 : 5 → 2 → 1

(صحيح) 1 → 5 : 5 → 4 → 1

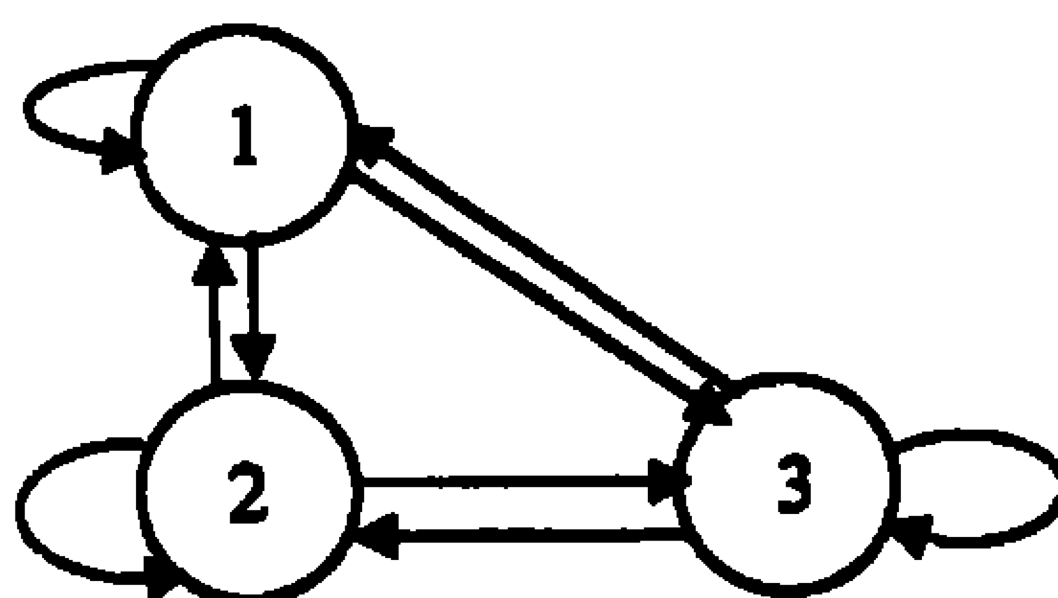
(صحيح) 2 → 5 : 5 → 4 → 2

(صحيح) 3 → 4 : 4 → 2 → 3

(صحيح) 3 → 5 : 5 → 2 → 3

(صحيح) 3 →5 : 5 → 4 → 3

طالما أن جميع الانتقالات كان لها اختصاراً كما تدل على ذلك كلمة صحيـــح، فـــإن الشبكة مثلت علاقة انتقالية. سنعطي مثالاً آخراً لشبكة مشهورة وهي



يوجد هنا اثني عشر انتقالاً صحيحاً كالتالي:

(صحيح) 1→1 : 1 → 2 → 1

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 3$ (صحيح)

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 : 1 \rightarrow 1$ (صحيح)

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 2$ (صحيح)

$2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 : 2 \rightarrow 2$ (صحيح)

$2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 : 2 \rightarrow 3$ (صحيح)

$2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 : 2 \rightarrow 1$ (صحيح)

$2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 : 2 \rightarrow 2$ (صحيح)

$3 \rightarrow 1 , 1 \rightarrow 2 : 3 \rightarrow 2$ (صحيح)

$3 \rightarrow 1 , 1 \rightarrow 3 : 3 \rightarrow 3$ (صحيح)

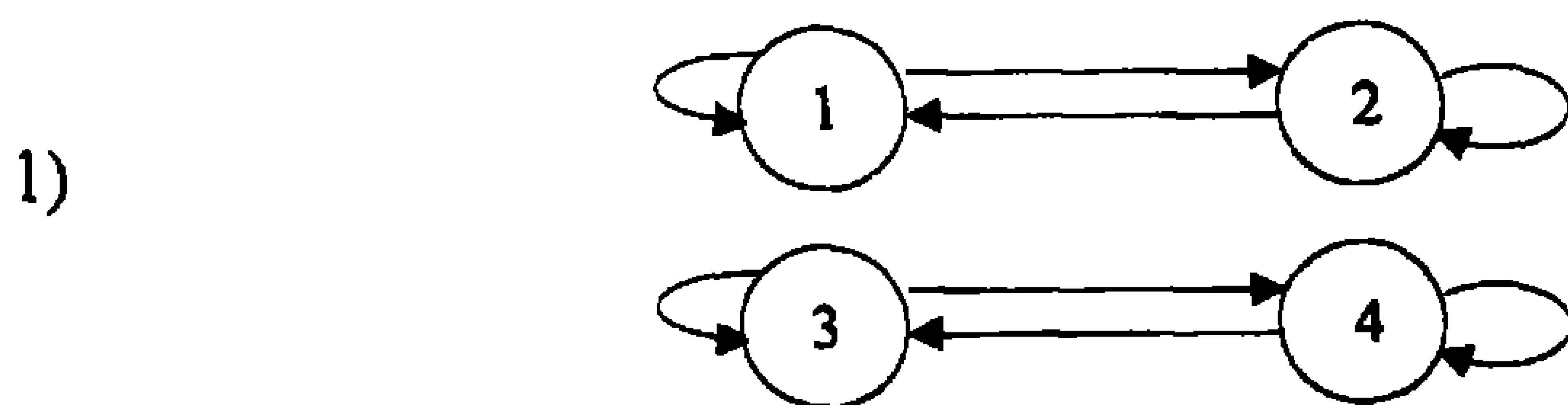
$3 \rightarrow 2 , 2 \rightarrow 1 : 3 \rightarrow 1$ (صحيح)

$3 \rightarrow 2 , 2 \rightarrow 3 : 3 \rightarrow 3$ (صحيح)

سبب شهرة هذه الشبكة أنها تربط كل دائرة مع جميع الدوائر في الشبكة عن طريق أسهم مباشرة. لذلك سيكون لأي انتقال اختصار. بنفس المنطق يمكن القول أن الشبكة المحتوية على 4 دوائر وستة عشر سهماً تربط الدوائر جميعها مع بعضها البعض تمثل علاقة انتقالية. يمكن للطالب المهتم أن يكتب الانتقالات حيث سيكتشف أنها ٣٦ انتقالاً. ينطلق في هذه الشبكة بسبب التماثل من كل دائرة تسعة انتقالات. ربما يجدر الملاحظة أن هذه الشبكات المميزة تمثل العلاقة التي تكون هي مجموعة الضرب الكارتيزي نفسها وليس مجموعة جزئية حقيقية منها. كما تجدر الإشارة إلى أن المرء لو اختار مساراً داخل الشبكة من دائرة إلى أخرى عبر عدة دوائر، فإنه سيجد في شبكات العلاقات الانتقالية دائماً طريقاً مباشراً من دائرة البداية إلى دائرة النهاية. تفسير ذلك

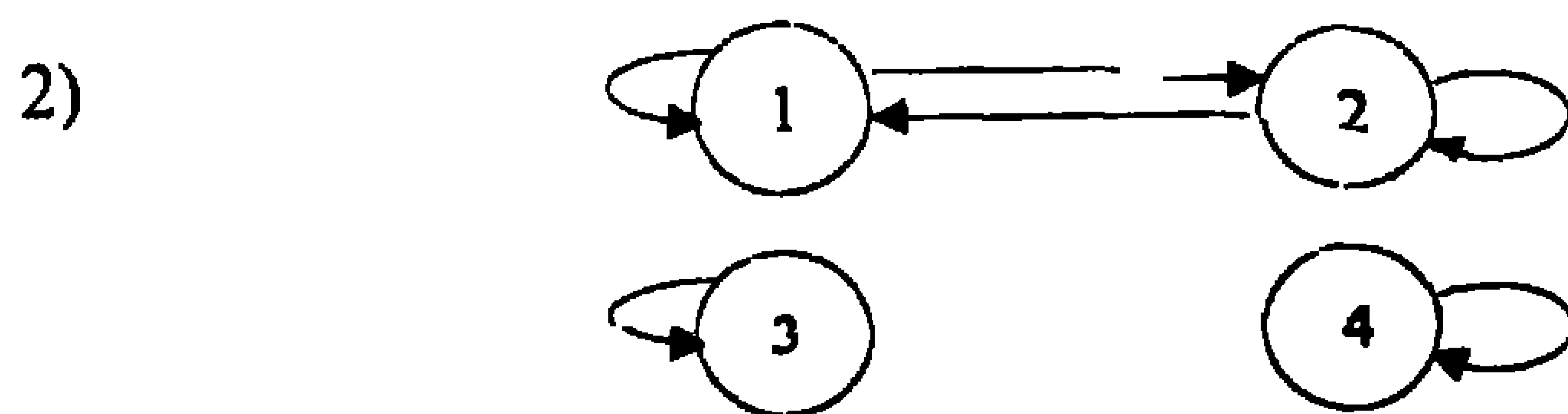
يكون كالتالي: يستبدل المرء المسار من الدائرة الأولى إلى الثالثة بطريق مباشر لأن هـذا المسار عبارة عن انتقال له اختصار. ثم يعيد المرء الكرة بأن يستبدل الانتقال المكون من الدائرة الأولى إلى الدائرة الرابعة عبر الدائرة الثالثة بطريق مباشر. يعيد استخدام المـرء الطريق الجديد كمرحلة أولى في انتقال يأخذه من الدائرة الرابعة إلى الخامسة كمرحلة ثانية بحيث يجد الآن طريقاً مباشراً من الدائرة الأولى إلى الخامسة. عند الاستمرار بهـذا المنوال نصل إلى حقيقة وجود طريق مباشر من الدائرة الأولى إلى الدائرة الأخيرة. في ختام هذا الفصل سنعطي بعض الأمثلة على شبكات لعلاقات انتقالية:

1)



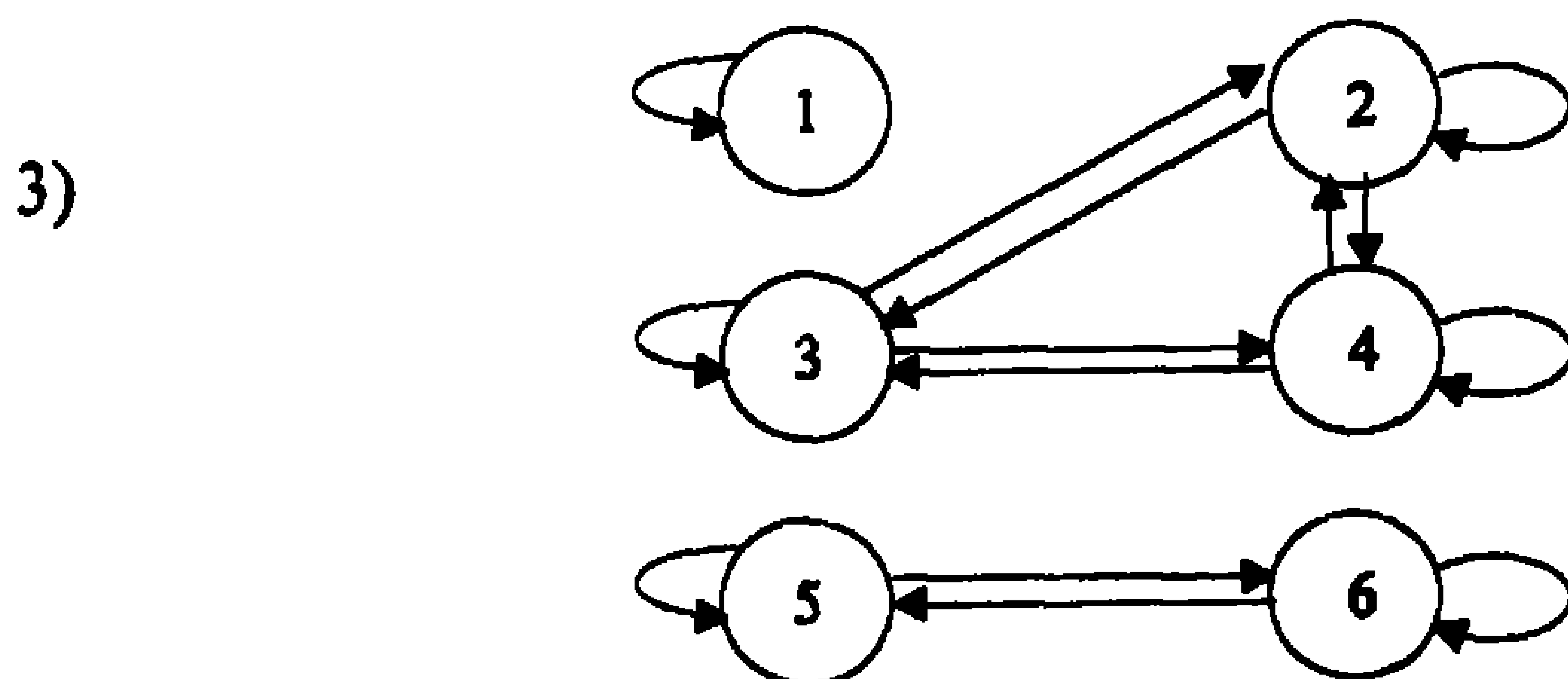
يوجد 4 انتقالات صحيحة حيث يوجد في الثنائي الأعلى اثنان وفي الثنائي الأسفل أيضاً اثنان .

2)



يوجد انتقالان صحيحان فقط.

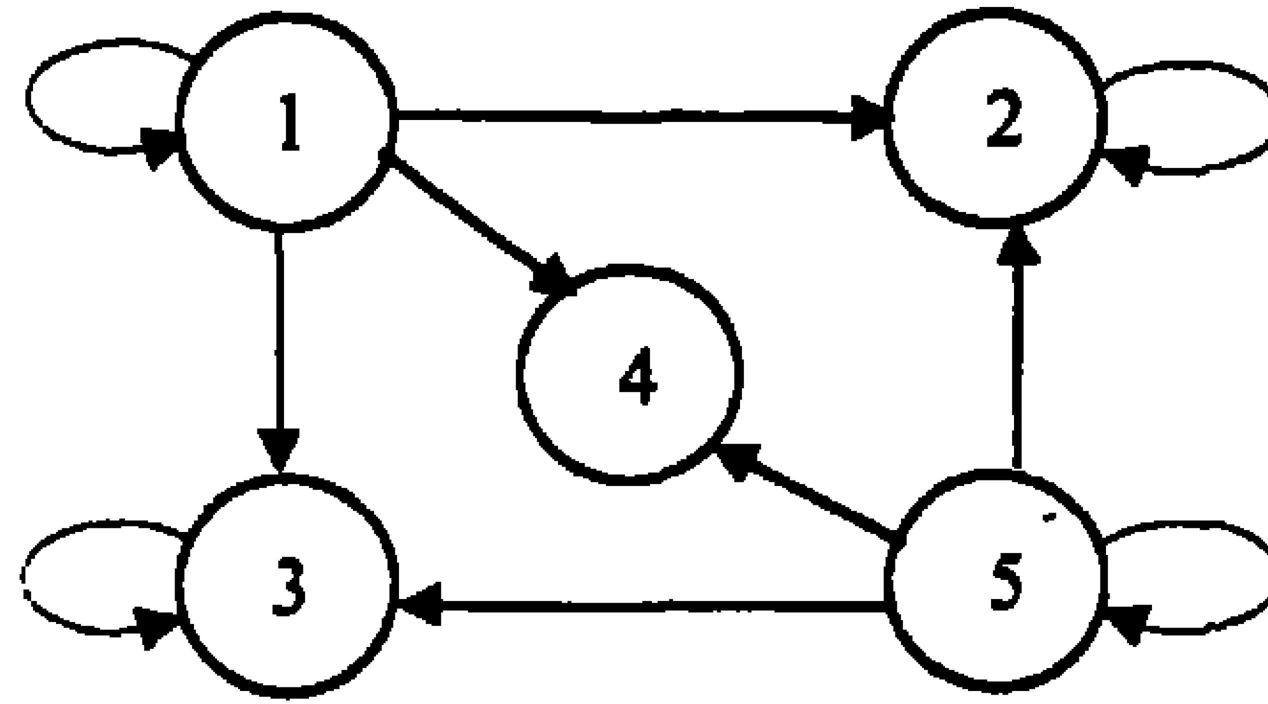
3)



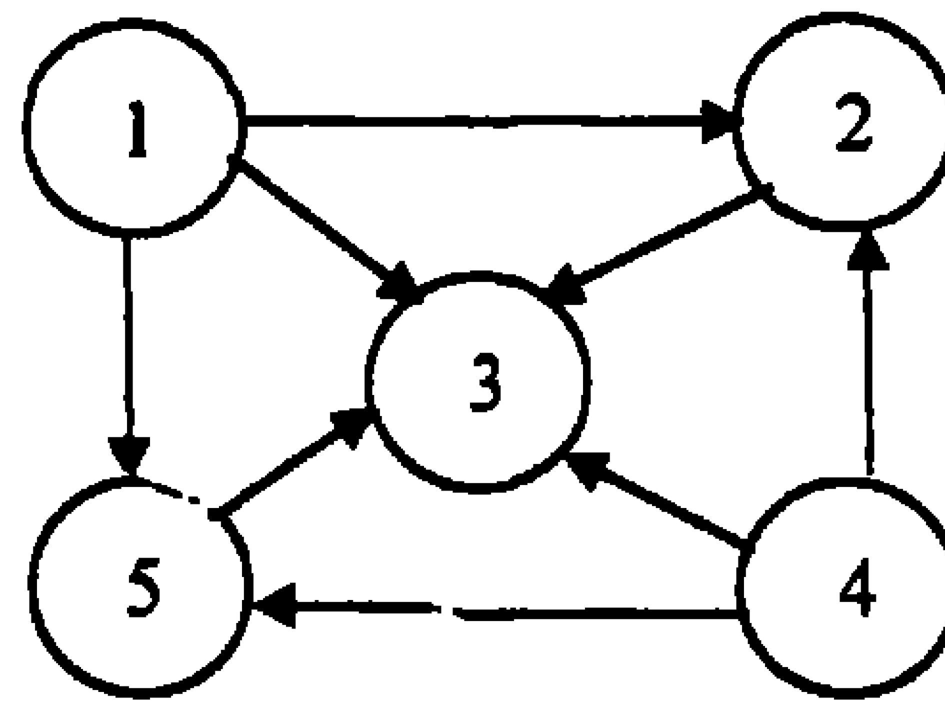
يوجد ١٤ انتقالاً صحيحاً.

تمارين: حدد الصفات المتوافرة داخل العلاقات ذات الشبكات الموجهة التالية:

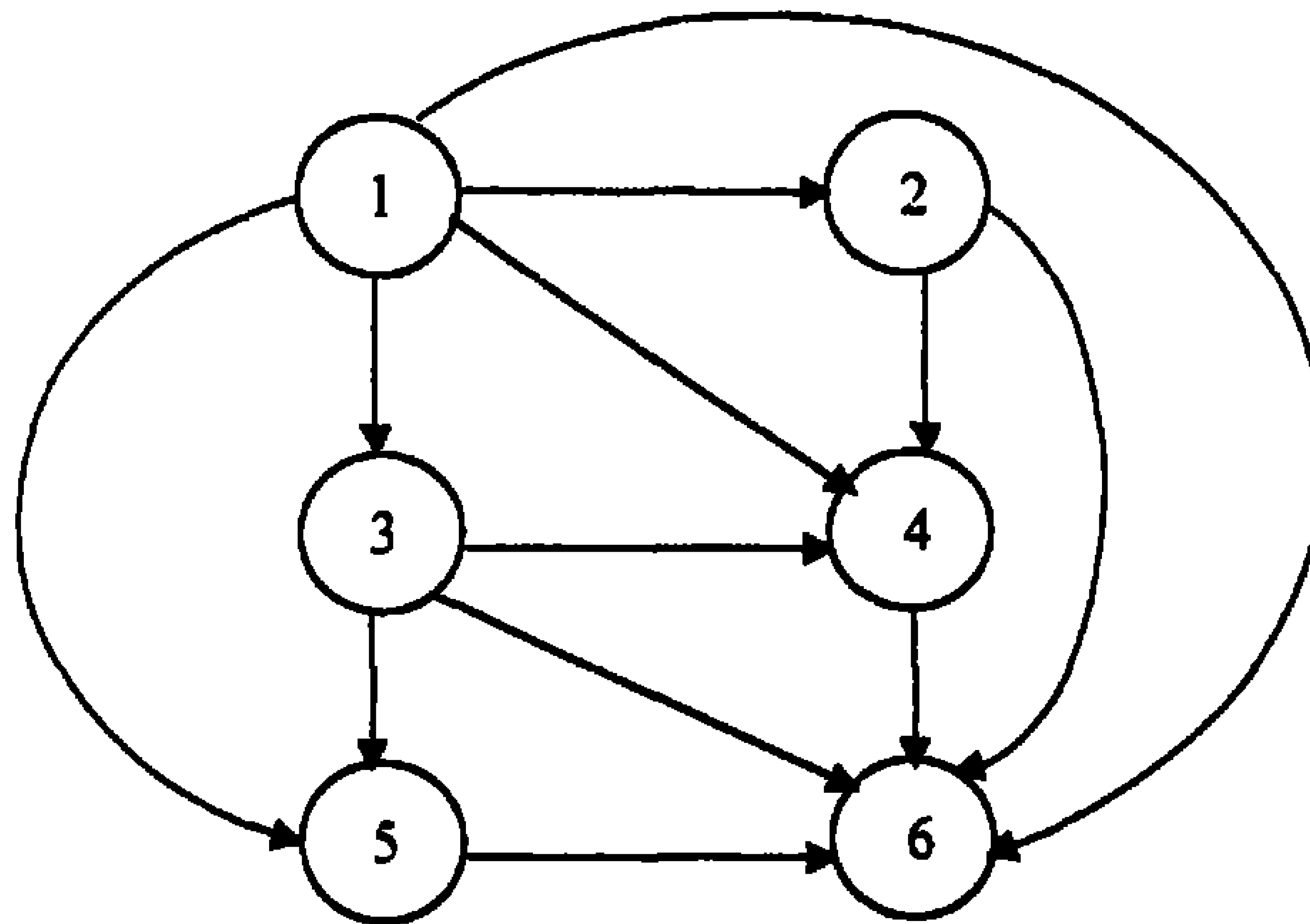
1)



2)

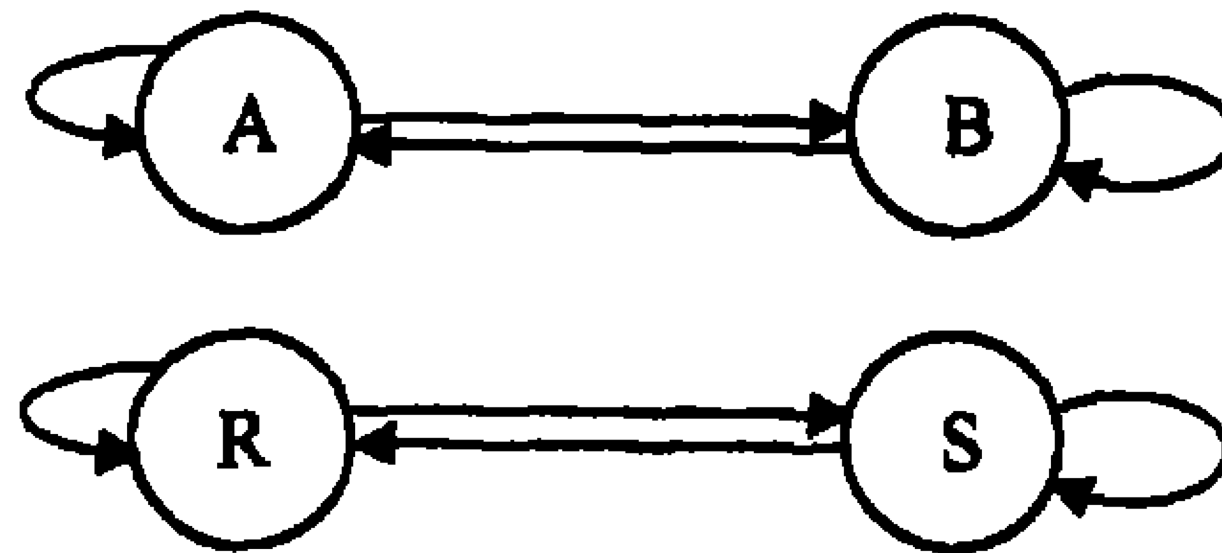


3)

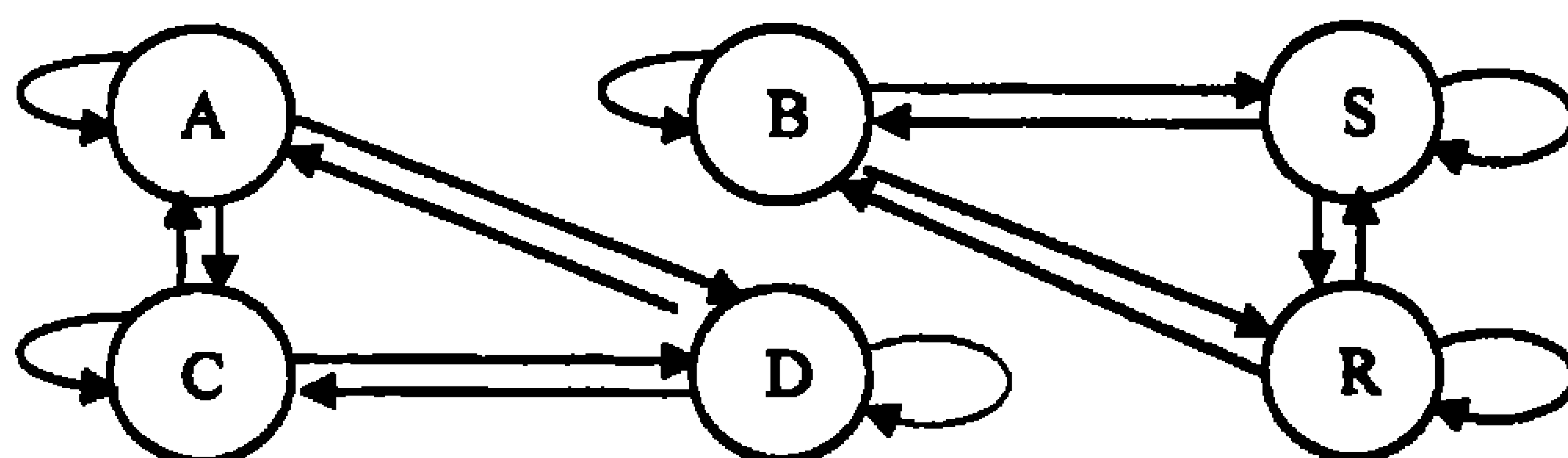


الفصل السادس
علاقات التكافؤ

هذا النوع من العلاقات يأتي في الحياة العملية على صورة علاقات الصداقة بين الأشخاص مثلا. عند نشوء علاقة صداقة بين شخصين فإنها تكون متبادلة، أي كلا الطرفين يتحدث ويصادق الآخر. كما أن المثل العربي يقول صديق صديقي هو صديقي، لذا تكون علاقات الصداقة متعدية بحيث يشكل المرء مجموعة أصدقاء تتحادث مع بعضها البعض عندما يلتقون. وكما قد يحدث أحيانا يتحدث المرء مع نفسه (أو مجازا يتصادق مع نفسه). هذا الكلام هو تعبير عن ثلاث صفات من صفات العلاقات الرياضية وهي: الانعكاسية والتماثلية والانتقالية. فلو كان لدينا أربعة أشخاص، ولنقل أحمد وبسام وسحيد ورائد. لنرمز إلى كل شخص بأول حرف من اسمه داخل دائرة. سنشبك أي دائرة مع أخرى إذا كان الشخص في الأولى يصادق الشخص في الثانية. لنفرض أن الشكل كان كالتالي:



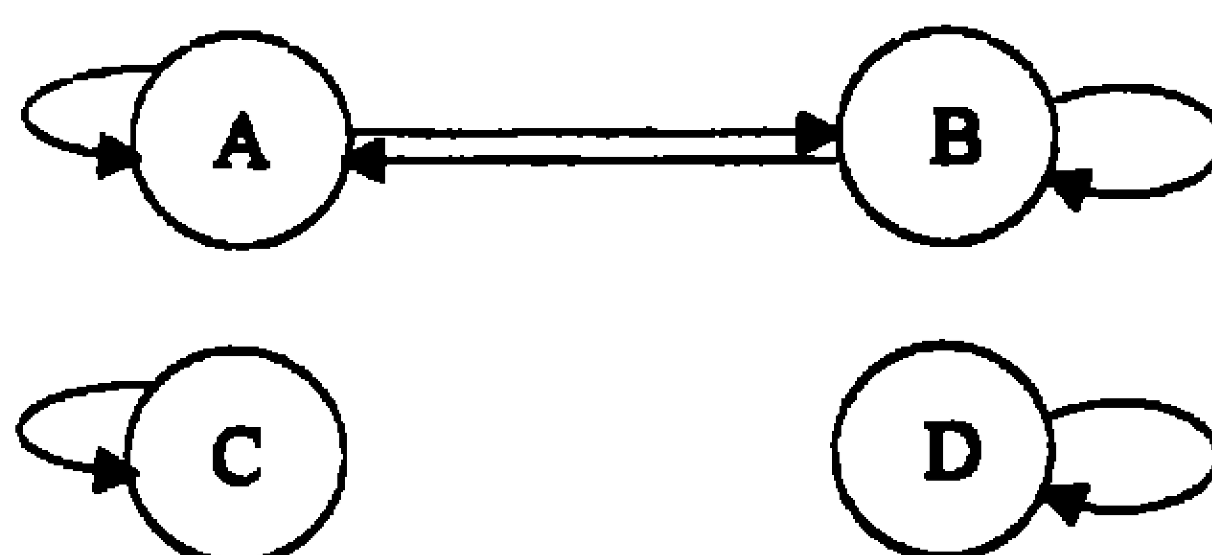
الشكل يمثل شبكة موجهة فيها الصفات الثلاث: الإنعكاسية، التماثلية والانتقالية. تدعى الشبكة في هذه الحالة شبكة تكافؤ، ويقال أنها تعبر عن علاقة تكافؤ. لننظر إلى الشبكة التالية:



هذه شبكة موجهة تحتوي على الصفات المطلوبة من شبكة التكافؤ وهي الانعكاسية والتماثلية والانتقالية. تترجم هذه الشبكة بلغة الصداقة أن A و D و C أصدقاء، كما أن B و S و R هم مجموعة أصدقاء أخرى. لا توجد بين المجموعتين أية احتكاكات ودّية. مجموعة الأصدقاء داخل مجموعة أشخاص تدعى صف تكافؤ. أي لدينا في الشبكة السابقة صفي تكافؤ. سنستخدم رمز القوسين المعقوفين [ ] للدلالة على صف تكافؤ العنصر، فمثلاً [A] ترمز إلى صف التكافؤ الذي ينتمي إليه A . رياضياً نكتب

$$[A] = \{A, C, D\}$$

لو درسنا شبكة التكافؤ التالية:



لوجدنا فيها صفوف التكافؤ الثلاثة

$$\{A, B\}, \{C\}, \{D\}$$

نلاحظ أن صفوف التكافؤ تشكل تقسيماً للمجموعة الأصلية من الأشخاص وهي

$$\{A, B, C, D\}$$

هذا هو الوضع دائماً في علاقات التكافؤ حيث أن أي علاقة تكافؤ على مجموعة مع نفسها تؤدي إلى مجموعة من صفوف التكافؤ التي تشكل تقسيماً للمجموعة.

مثـــال: لو كانت لدينا المجموعة

$$A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$$

وعرفنا المجموعة S على أنها مجموعة الضرب الكارتيزي $A \times A$. ثم عرفنـــا علاقـــة R على المجموعة S مع نفسها كالتالي:

$$(a,b)\ R\ (c,d) \Leftrightarrow a\,d = b\,c$$

أي الزوج المرتب (a,b) يرتبط مع الزوج المرتب (c,d) إذا كان حاصل ضـــرب الأول من الزوج الأول في الثاني من الزوج الثاني يساوي حاصل ضرب الثاني مـــن الـــزوج الأول في الأول من الزوج الثاني. كل زوج سيرتبط مع نفسه لأن حـــاصل الضـــرب الأول هو حاصل ضرب العددين داخل الزوج. الكلام نفسه ينطبـــق علـــى حـــاصل الضرب الثاني، ولذا يتساويان. إذا كان الزوج (a,b) مرتبط مـــع (c,d)، فإن الـــزوج (c,d) سيرتبط مع الزوج (a,b). لفهم ذلك دعنا نفسر رياضيا معنى ارتباط (a,b) مـــع (c,d) على أن المعادلة التالية متحققة:

$$a\,d = b\,c$$

إذا أردنا بحث ارتباط (c,d) مع (a,b)، لوجب علينا أن ندرس تساوي حاصل الضرب الأول وهو cb مع حاصل الضرب الثاني وهو da. بما أن الضرب تبديلي ينتـــج مـــن المعادلة الأخيرة أن حاصلي الضرب يتساويان. إذا، العلاقة R هـــي علاقـــة تماثليـــة. سنبحث الآن في صفة الانتقالية. إذا كان الزوج (a,b) يرتبط مع (c,d) وكان الـــزوج (c,d) بدوره مرتبط مع الزوج (e,f)، فلا بد أن يتحقق التالي:

$$a\,d = b\,c\,, \quad c\,f = d\,e$$

طالما أن الأعداد في المعادلتين تأتي من المجموعة A، إذن يمكن إجراء عمليـــات قســـمة بحيث تأخذ المعادلتان الشكل التالي:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ , \quad \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

لذلك نستنبط من دمج المعادلتين أن

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$$

من خلال عملية ضرب تبادلي نرى أن

$$af = be$$

تحقق هذه المعادلة يعني أن الزوج (a , b) يرتبط مع الزوج (e , f) ارتباطاً مباشراً.

نستخلص من الشرح السابق أن العلاقة R هي علاقة تكافؤ. تكـــون صفـــوف التكافؤ في هذه الحالة هي المجموعات:

{ (1,1) , (2,2) , (3,3) , (4, 4) , (5 , 5)},

{ (1,2) , (2, 4)} , {(2,1) , (4, 2)},

{(1,3)} , {(1,4)} , { (1,5)} , { (2,3)},

{ (2,5) } , {(3,1)}, {(3,2)} , {(3,4)},

{(3,5)} , {(4 ,1)} , {(4,3)} , {(4,5)},

{(5,1)} , {(5,2)}, {(5,3)} , {(5,4)}

الفصل السابع

علاقات الترتيب الجزئي

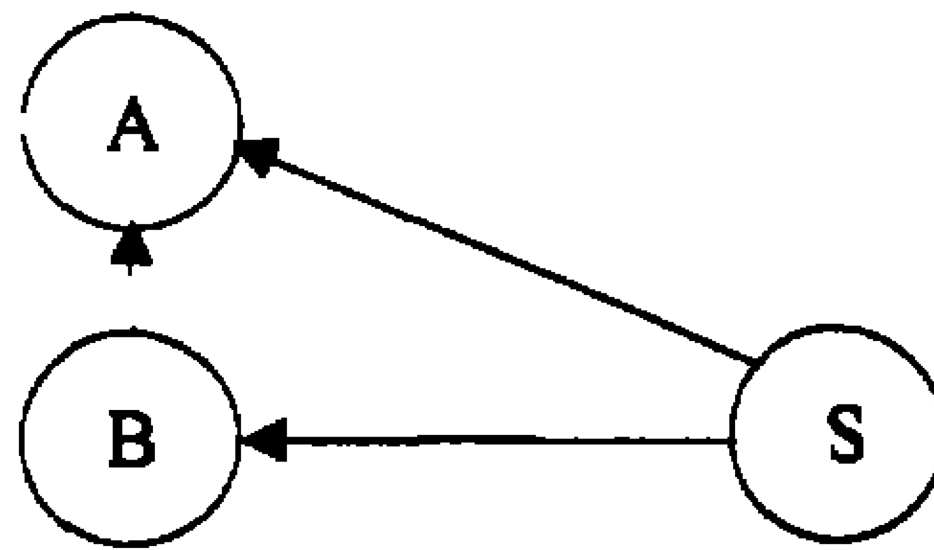
هذا النوع من العلاقات يأتي في الحياة العملية عند إجراء عمليـــة مقارنـــة بـــين قياسات مختلفة لشيء ما. فمثلا، عندما يكون للأشخاص التالية أسمـــاؤهم الأطـــوال المذكورة:

أحمد طوله 180 سم

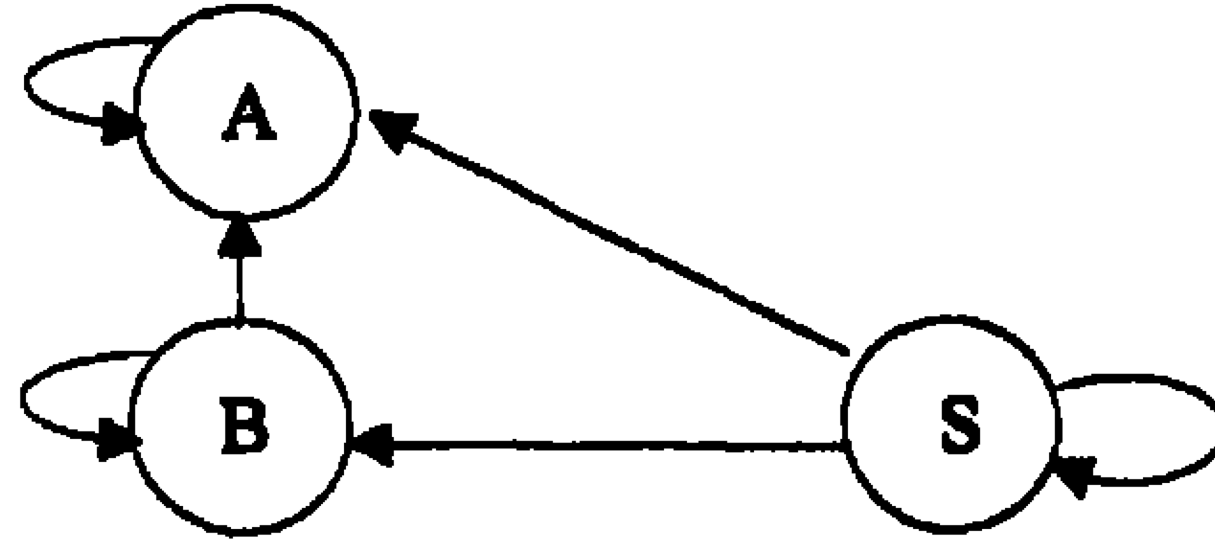
بسام طوله 170 سم

سعيد طوله 165 سم

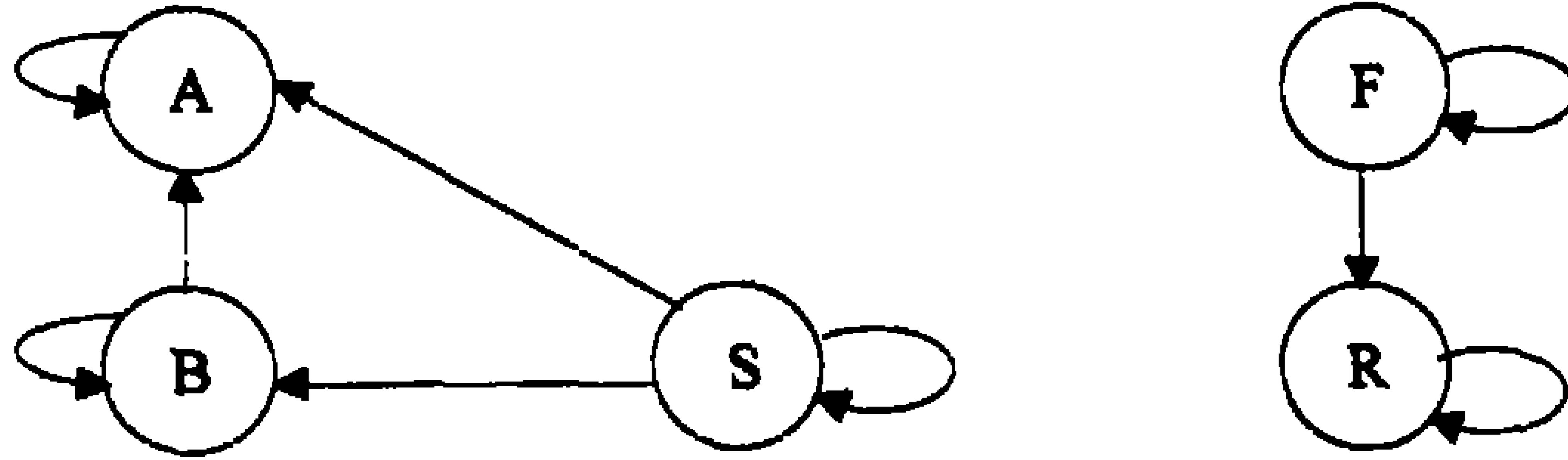
سنرمز لكل شخص بدائرة فيها الحرف الأول من اسمه، ونرسم سهم خارج من دائـــرة وذاهب إلى أخرى إذا كان الشخص داخل الأولى أقصر من الشخص داخل الثانيـــة. هذا المطلب يؤدي إلى الشكل التالي:



الشكل المتكون من قياسات الطول توجد فيه الصفتين الانتقالية واللاتماثلية. لو اعتبرنـــا أن العلاقة بين الأشخاص هي أقصر منه أو يساويه في الطول لحصلنا علـــى الأســـهم الانعكاسية، ولأصبح الشكل كالتالي:



هذه شبكة موجهة تحتوي على الصفات الثلاث: الانتقالية، اللا تماثلية والانعكاسية. تدعى مثل هذه الشبكات بشبكات الترتيب الجزئي والعلاقة المنتجة لها بعلاقة ترتيب جزئي. لاحظ أن كلمة ترتيب تأتي من ترتيب الأطوال ومقارنتها. كلمة جزئي تدل على أن المعلومات عن القياسات تكون أحياناً جزئية وغير كاملة. مثلاً، لو حصلنا على معلومة رابعة تفيد بأنه تم قياس طول كل من رائد وفهد وكان رائد أطول من فهد (دون معرفة الأطوال بالضبط). في هذه الحالة نرسم العلاقة بين الأشخاص الخمسة كالتالي:

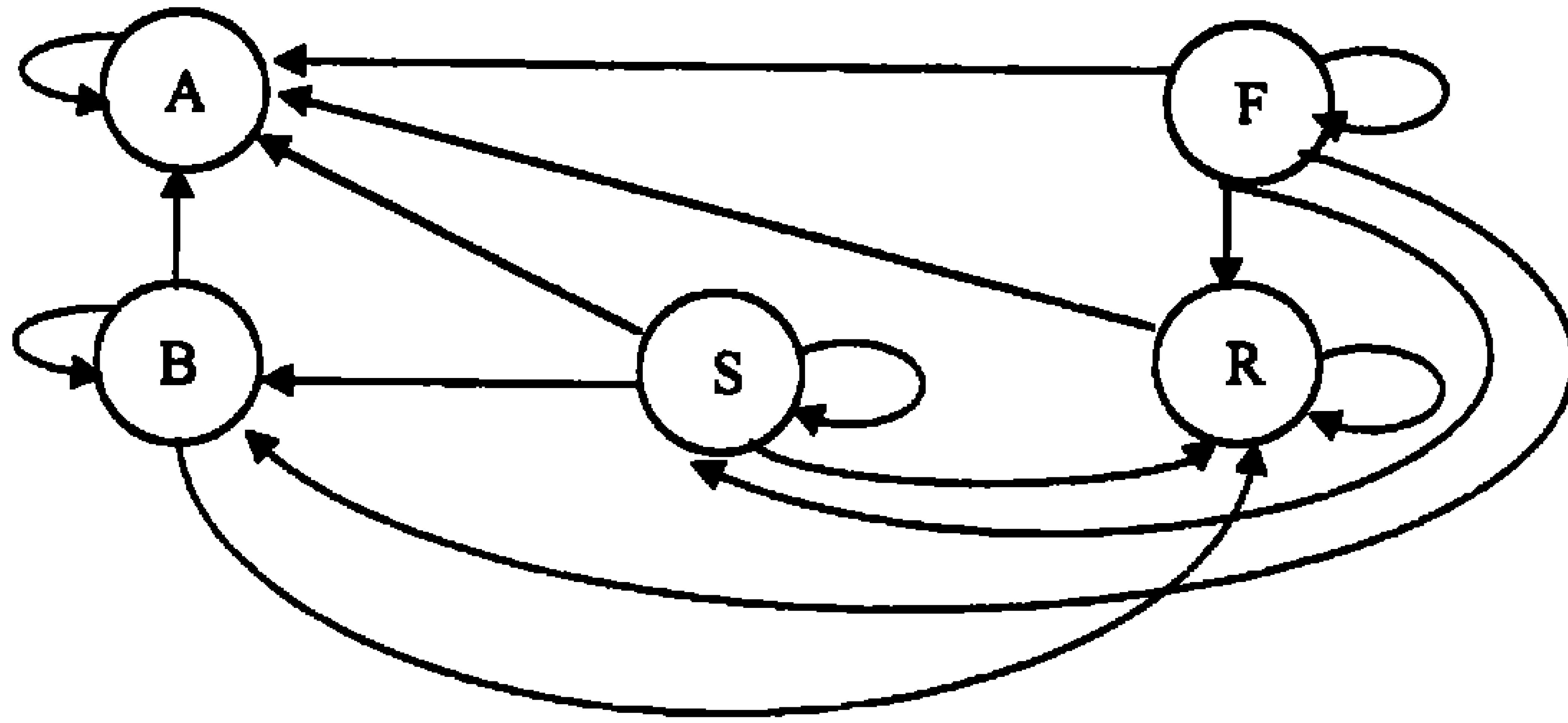


هذه شبكة موجهة فيها الصفات الثلاث: الانتقالية، اللا تماثلية والانعكاسية. لا بد أن تكون الشبكة محتوية لهذه الصفات لأنها أتت من عملية مقارنة وترتيب أطوال. ستصبح هذه الشبكة شبكة ترتيب كلي لو استطعنا معرفة جميع الأطوال بالضبط. أي إذا عرفنا أن:

رائد طوله ١٧٥ سم

فهد طوله ١٦٠ سم

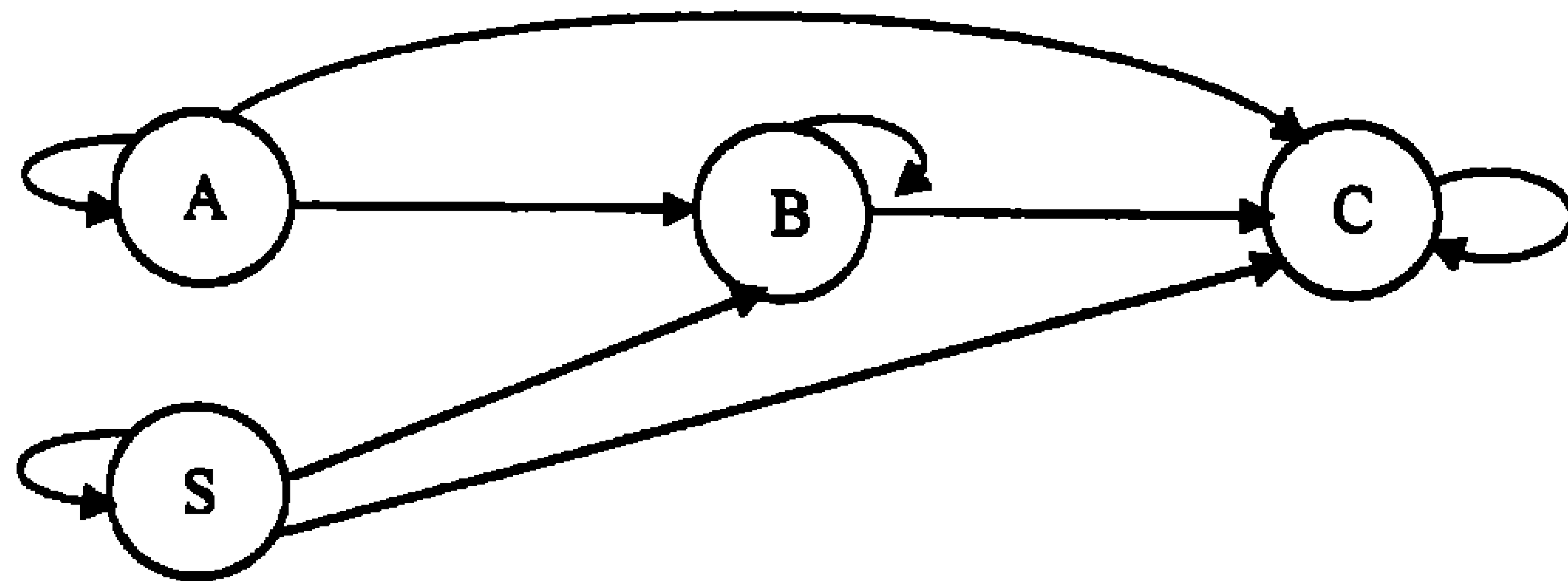
لتكونت لدينا معلومات كاملة عن أطوال الأشخاص وترتيبهم فيما بينهم. رسم شبكة العلاقة يوصلنا إلى الشبكة التالية:



لاحظ أنه في شبكات الترتيب الكلي ينطلق من أصغر دائرة (ترمز الدائرة إلى الشخص الأقصر) أسهم في جميع الاتجاهات، ثم ينطلق من الدائرة التي تكبرها قليلاً أسهم في جميع الاتجاهات ما عدا الدائرة التي تصغرها وهلم جرا. في النهاية أكبر دائرة لا ينطلق منها سوى السهم الانعكاسي. لو أردنا ترتيب الأشخاص من الأقصر إلى الأطول لحصلنا على الترتيب: فهد ثم سعيد ثم بسام ثم رائد ثم أحمد. يرمز لهذا الترتيب بالطريقة التالية:

$$F \leq S \leq B \leq R \leq A$$

في علاقات الترتيب الكلي يمكن وضع جميع الأشخاص على خط واحد بحيث تفصل بينهما إشارات أصغر أو يساوي. لو كان الترتيب جزئياً لحصلنا على أكثر من خط لإيضاح الترتيب. مثلاً، الشبكة الموجهة التالية تعبّر عن علاقة ترتيب جزئي:

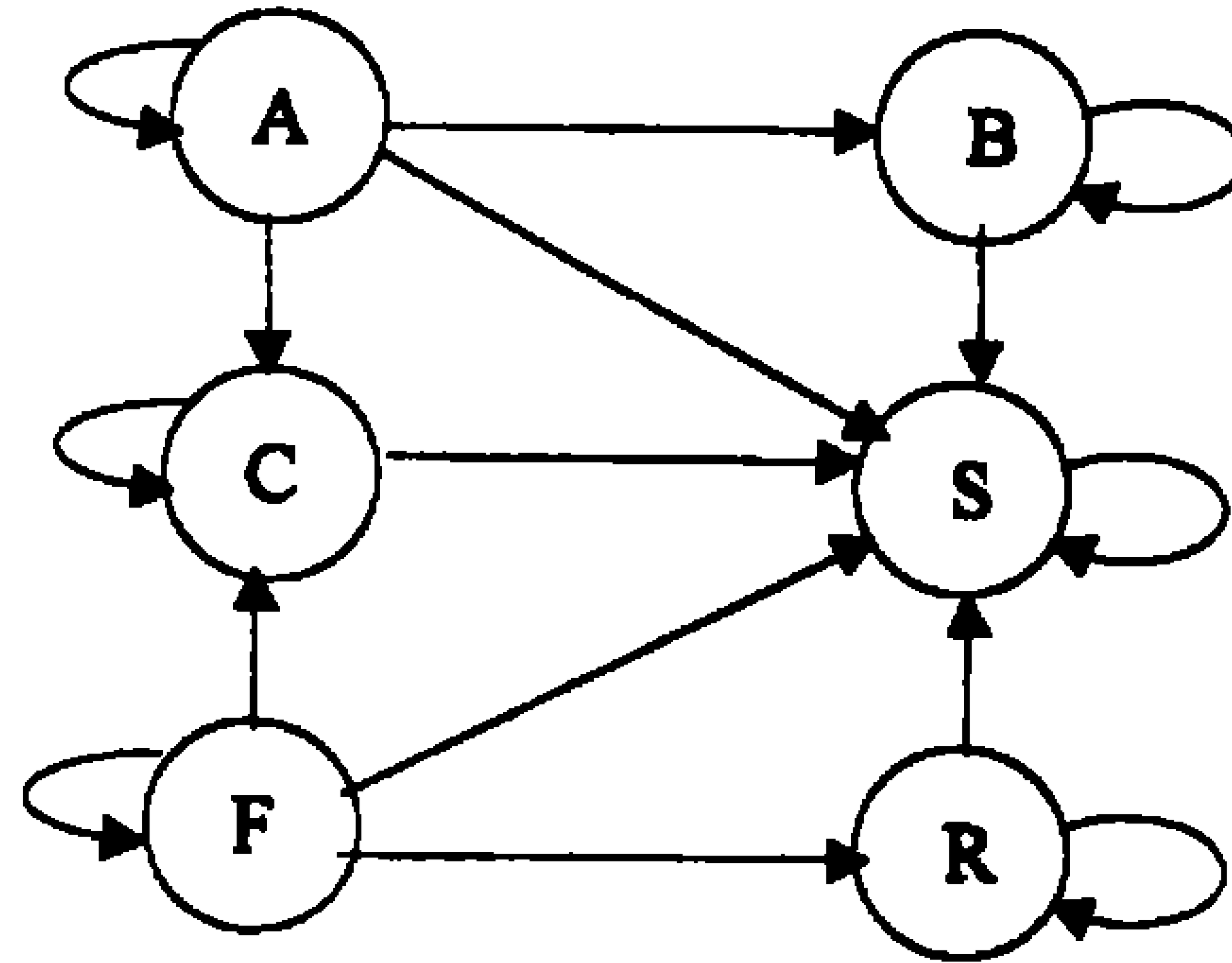


يوجد هنا ترتيبان وهما:

$$A \le B \le C$$
$$S \le B \le C$$

علاقة الترتيب بين أحمد وسعيد غير معروفة. لاحظ أن خط الترتيب يمثل خط طويـــل داخل شبكة لا يمكن الحصول على خط أطول منه وفي الوقت نفسه يحتويه كجزء منه.

لو نظرنا إلى الشبكة التالية:



الشبكة فيها الصفات الثلاثة المطلوبة لتكون شبكة ترتيب جزئي. الترتيب الجزئي فيــها يتم التعبير عنه من خلال الخطوط الأربعة:

$$A \le B \le S \;, F \le C \le S$$
$$A \le C \le S \;, F \le R \le S$$

<u>مثـــال</u>: لنأخذ المجموعة.

$$A = \{1 \;, \; 2 \;, \; 3\}$$

وندرس تأثير عملية الاحتواء على عناصر مجموعة القوة P (A). إذا كـــانت إحـــدى المجموعات الجزئية محتواة في مجموعة جزئية أخرى سنعتبر أنه توجد علاقة احتواء بـــين الأولى والثانية. هذه العلاقة بحكم التعريف علاقة انعكاسية. إذا كانت مجموعة جزئيـــة محتواة في داخل مجموعة جزئية مختلفة، فلا بد أن تكون المجموعة الثانية أكبر. لذلك لـــن تكون المجموعة الثانية محتواة في الأولى، أي العلاقة تسير باتجاه واحد دون عودة. هـــذا يمكننا من القول أن علاقة الاحتواء بين عناصر مجموعة القوة هي علاقـــة لا تماثليـــة.

سنثبت الآن أيضاً أنها علاقة انتقالية: لو كان لدينا ٣ مجموعات جزئية بحيـــث الأولى محتواه في الثانية والثانية محتواة في الثالثة، لوجب أن تكون الأولى محتـــواة في الثالثـــة.
نستنتج مما سبق أن علاقة الاحتواء هي علاقة ترتيب جزئي لمجموعة القوة مع نفســـها.
نحصل بالتالي على عدة ترتيبات وهي في هذا المثال تحديداً:

$\{\ \} \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\}$

$\{\ \} \subset \{2\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\}$

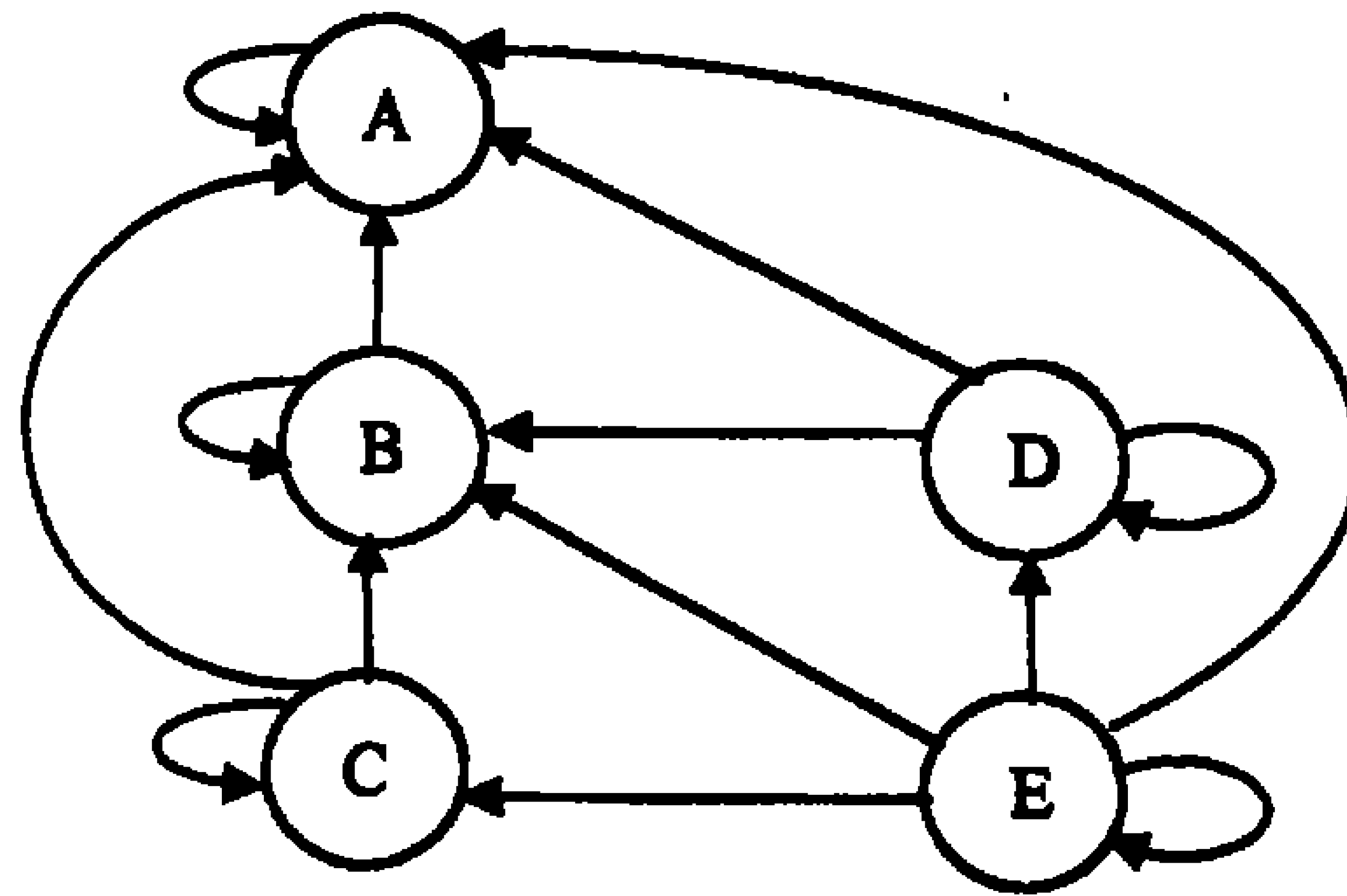
$\{\ \} \subset \{3\} \subset \{1,3\} \subset \{1,2,3\}$

$\{\ \} \subset \{1\} \subset \{1,3\} \subset \{1,2,3\}$

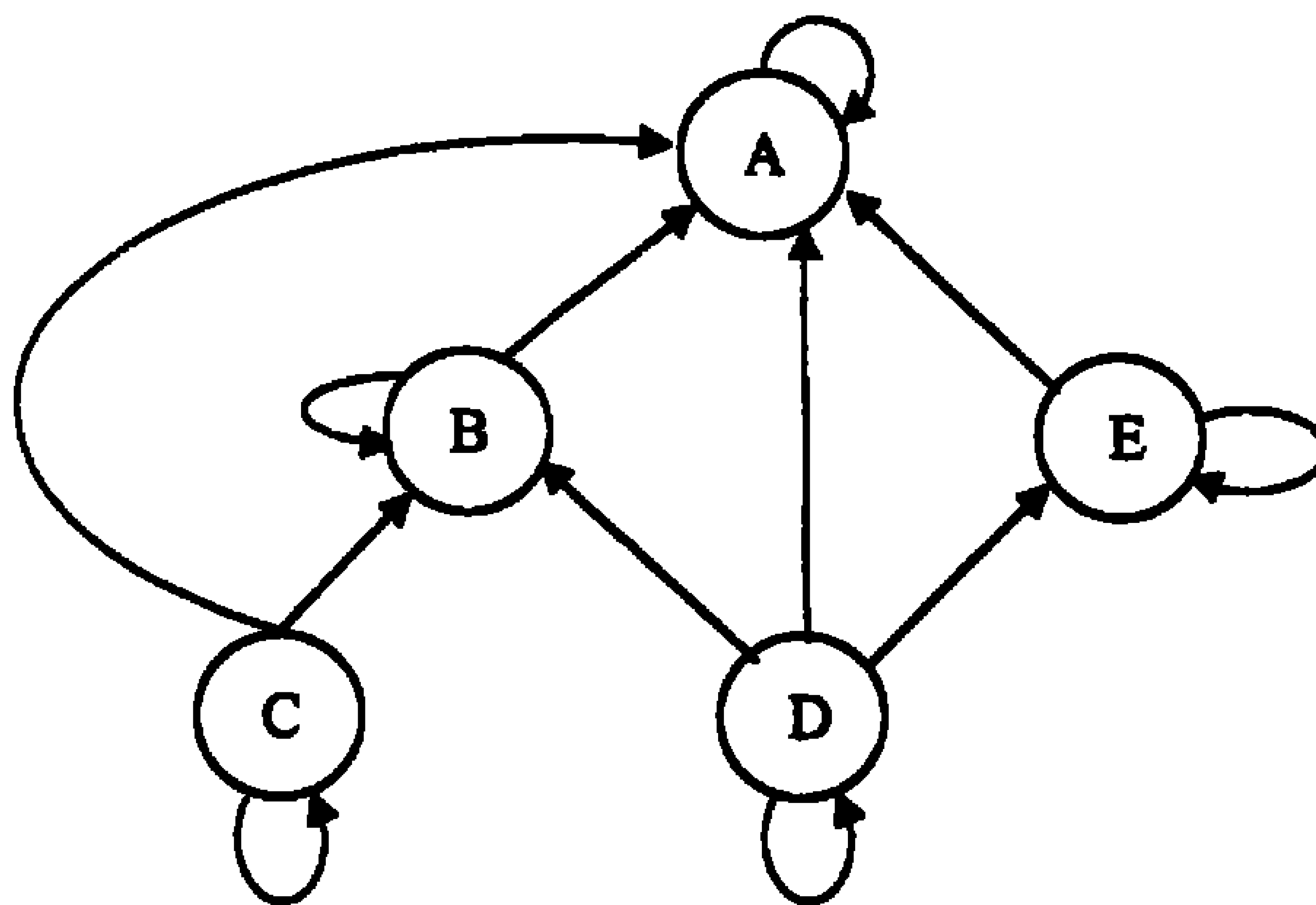
$\{\ \} \subset \{2\} \subset \{2,3\} \subset \{1,2,3\}$

$\{\ \} \subset \{3\} \subset \{2,3\} \subset \{1,2,3\}$

1)



2)



الفصل الثامن

تركيب العلاقات

نقصد هنا بالتركيب دمج علاقتين معا. لكي تنجح عملية الدمج لعلاقة تربط المجموعة A مع المجموعة B مع علاقة أخرى، يجب أن تربط العلاقة الأخرى المجموعة B مع مجموعة ثالثة C. في هذه الحالة تنشأ علاقة جديدة من عملية الدمج تربط المجموعة A مع المجموعة C. مثلاً، لو كان لدينا

$$A = \{1 , 2 , 3\}$$
$$B = \{ a , b\}$$
$$C = \{ x , y\}$$

وعرفنا العلاقات التالية:

$$p = \{ (1 , b) , (2 , a)\}$$
$$Q = \{ (a , x) , (b, y) , (a , y) \}$$

سنكتب أزواج العلاقة P على صورة أسهم بحيث يتم استبدال كل زوج بسهم على سطر واحد أي

$$1 \rightarrow b$$
$$2 \rightarrow a$$

لكي نقوم بتركيب P مع Q نضع عمود الأسهم للعلاقة P إلى اليسار وعمود الأسهم للعلاقة Q إلى اليمين كالتالي:

$1 \rightarrow b$	$a \rightarrow x$
$2 \rightarrow a$	$b \rightarrow y$
	$a \rightarrow y$

نبدأ بالسهم المنطلق من 1 إلى b حيث نكمل المسيرة في العمود الثاني (السطر الثـــاني) من b إلى y. عند دمج المسيرة باستخدام سهمين وذكر البداية والنهاية فقط نحصـــل على السهم التالي:

$$1 \rightarrow x$$

عند فعل الشيء نفسه مع احتمالات إكمال مسيرة السهم المنطلق مع 2 إلى a ينتج

$$2 \rightarrow x$$
$$2 \rightarrow y$$

هذه الأسهم الثلاثة تمثل الأزواج المرتبة للعلاقة المركبة. يرمز لهذه العلاقة بـــالرمزQoP، أي لدينا

$$QoP = \{ (1 , x) , (2 , x) , (2 , y)\}$$

تقرأ QoP العلاقة Q بعد العلاقة P، أي أننا نبدأ بأسهم P ثم نكمل بعد ذلك بأســـهم العلاقة Q. يحدث كثيراً في التطبيقات أن تكون المجموعات الثالث A و B و C عبـــارة عن نفس المجموعة. يمكن في هذه الحالة حساب QoP و PoQ. النتيجة غير متســـاوية أي عملية الدمج غير تبديلية. لننظر سوياً إلى المثال التالي:

$$A = \{1 , 2 , 3 , 6 , 5, 7 , 8\}$$

ونعرف علاقتين تربطان A مع A

$$P = \{ (1,2) , (2,3) , (2,7) , (7,5)\}$$
$$Q= \{(1,3) , (3,6) , (7,8) , (8,2)\}$$

بالتالي سنحصل على الأجوبة

$$Q_oP = \{(2,6) , (2,8)\}$$
$$P_oQ= \{(8,3) , (8,7)\}$$

أحياناً يجد الطالب في المراجع المصطلح P_oP_oQ. لا توجد أقواس تحدد أوليـــة عمليـــة الدمج الأولى أو الثانية، مما يعني أن الأمر سيان. أي يمكن اعتبار المصطلح السابق رمـــز

للمصطلح $P_o (P_oQ)$ أو $(P_oP)\ _oQ$. يمكن للطالب بسهولة أن يتأكد من أنه في كلتا الحالتين سنصل إلى العلاقة

$$P_o\ P_oQ = \{ (8,5)\}$$

كما تبرز أحياناً المعضلة بأن العلاقتين معطاتين دون تحديد للمجموعات الثلاث A و B و C. مثلاً، لو فرضنا أن

$$P= \{(1,2) , (2,3) , (4,5)\}$$
$$Q= \{(3,8) , (5,4) , (7,9)\}$$

لا توجد مشكلة في تحديد A و C لأن A هي العناصر التي تأتي أولاً في أزواج العلاقة P و C هي العناصر التي تأتي ثانياً في أزواج العلاقة Q. بمعنى آخر، نستنتج أن

$$A = \{ 1 , 2 , 4 \}$$
$$C = \{ 4 , 8 , 9\}$$

بما أن المجموعة B تمثل حلقة الوصل والدمج بين العلاقتين، فيجب أن تتوافق مع كونها تمثل نهاية أزواج العلاقة P وبداية أزواج العلاقة Q. لذا، سنعتبر في مثل هذه الحالات أن المجموعة B هي اتحاد العناصر التي تأتي ثانياً في أزواج P مع العناصر التي تأتي أولاً في أزواج Q. ففي المثال السابق تكون B هي :

$$\{ 2 , 3 , 5\} \cup \{3 , 5 , 7\} = \{ 2 , 3 , 5 , 7\}$$

توجد طريقة جبرية لحساب علاقة الدمج تستخدم مفهوم مصفوفة العلاقة. المصفوفة تتكون من أسطر وأعمدة بحيث تمثل الأسطر العناصر التي تأتي أولاً في أزواج العلاقة وتمثل الأعمدة العناصر التي تأتي ثانياً في أزواج العلاقة. طبعاً، ليس بالضرورة أن يرتبط جميع عناصر A مع جميع عناصر B. لذلك، سنقوم بوضع الرقم صفر في خانة تقاطع السطر مع العمود إذا كان الزوج المرتب ذا الخانة الأولى العائدة إلى السطر والخانة الثانية العائدة إلى العمود غير موجود في العلاقة. أما إذا كان الزوج المرتب موجود، فإننا سنضع الرقم واحد في خانة التقاطع. مثلاً لو كان لدينا

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$
$P = \{ (1,a), (3,b), (2,a)\}$

المصفوفة التي تمثل العلاقة P هي التالية:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

لو كان لدينا الآن:

$A=\{ 1, 2\}$, $B = \{ 3, 4, 5, 6\}$,
$C = \{ 7, 8, 9\}$
$P = \{ (1,3), (2,5), (2,6)\}$
$Q = \{ (5,7), (4,8), (6,9)\}$

لحصلنا على مصفوفتين. سنضع مكان جدول أسهم العلاقة P مصفوفة العلاقـــة P و مكان جدول أسهم العلاقة Q مصفوفة العلاقة Q، أي

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

عدم وجود إشارة عملية في الرياضيات بين مقدارين يعني عملية الضرب. هذا تماماً مـــا سنفعله مع المصفوفتين، أي سنقوم بضرب مصفوفة العلاقة P في مصفوفة العلاقـــة Q. عملية الضرب في المصفوفات تختلف عنها في الأعداد. هنا يكون الضرب مكون مـــن عمليات ضرب وعمليات جمع. نأخذ من المصفوفة الأولى الأسطر ونأخذ من المصفوفـة الثانية الأعمدة. لاحظ أن أول سطر في مصفوفة العلاقة P يتكون مـــن 4 خانـــات، كذلك يتكون العمود الأول من مصفوفة العلاقة Q من 4 خانات . سنقوم بضـــرب كل خانة في نظيرها ونجمع الناتج، أي

$$1 * 0 + 0 * 0 + 0 * 1 + 0 * 0 = 0$$

الرقم الناتج سيتم تعويضه في الخانة التي تمثل تقاطع السطر الأول مع العمود الأول من مصفوفة ناتج الضرب. عندما نعيد الكرة مع السطر الثاني من مصفوفة العلاقة P، أي نضربه في العمود الأول من مصفوفة العلاقة Q ونجمع نحصل على

$$0 * 0 + 0 * 0 + 1 * 1 + 1 * 0 = 1$$

هذا الرقم الجديد يتم تعويضه في خانة تقاطع السطر الثاني مع العمود الأول لمصفوفة ناتج الضرب. طالما أن أسطر المصفوفة P انتهت، تكون بالتالي خانات العمود الأول من مصفوفة ناتج الضرب انتهت. بمعنى آخر، العمود الأول في مصفوفة ناتج الضرب هو 0 يأتي أسفل منه 1. للحصول على العمود الثاني في مصفوفة ناتج الضرب نأخذ العمود الثاني لمصفوفة Q ونضربه في كل من السطر الأول والثاني من أسطر P تباعاً. لذا سيكون العمود الثاني من مصفوفة ناتج الضرب هو 0 يأتي اسفل منه 0. تكرار العملية بالعمود الثالث لمصفوفة Q يؤدي إلى تشكل العمود الثالث من مصفوفة ناتج الضرب. حسب ما ورد تكون مصفوفة ناتج الضرب هي

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن حجم مصفوفة ناتج الضرب يوحي بأن سطراها الاثنان يمثلان عنصري المجموعة A وأعمدتها الثلاثة تمثل عناصر المجموعة C الثلاثة. هذا فعلاً ما يحدث، لأنه كما في حالة الحساب بالأسهم نقوم بدمج الأسهم معاً فلا يظهر في النهاية سوى عناصر المجموعة A في البداية وعناصر المجموعة C في النهاية. الحساب بالمصفوفات يستخدم المبدأ نفسه. لذلك، عندما نقوم بتحويل العلاقة Q_oP وهي

$$QoP = \{ (2,7) , (2,9)\}$$

إلى مصفوفة نجد أن هذه المصفوفة هي بالضبط مصفوفة ناتج الضرب. هذا يقودنا إلى استنتاج رياضي بأن مصفوفة العلاقة المركبة هي مصفوفة حاصل ضرب مصفوفة P مع

مصفوفة Q. الترتيب في ضرب المصفوفات مهم حيث أنه يعكس عملية التركيب غير التبديلية. لذا ضرب المصفوفات ليس عملية تبديلية. نود أن ننبه أيضا إلى أن عملية جمع حاصل ضرب العناصر المتناظرة في السطر والعمود تؤدي أحيانا إلى بروز أرقام مثل 2 أو 3 أو أكثر من ذلك. هذا معناه أن الزوج المرتب موجود أكثر من مرة، ولكننا عند تحويل المصفوفة إلى علاقة سنكتفي بكتابة الزوج المرتب مرة واحدة فقط.

مثال: لو كان لدينا

$$A = \{2,3\}\ ,\ B = \{7,8,9\},\ C = \{11, 22\}$$
$$P = \{(2,7)\ ,\ (2,8),\ (2,9),\ (3,7),\ (3,8),\ (3,9)\},$$
$$Q = \{(7,11)\ ,\ (9,22)\ ,\ (8,11)\}$$

أوجد Q_oP باستخدام المصفوفات ؟

الحل: سنكتب المصفوفتين ونضربهما معا بالترتيب مصفوفة P تليها مصفوفة Q

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة ناتج الضرب تساوي

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نحصل على

$$Q_oP = \{\ (2,11)\ ,\ (2,22),\ (3,11)\ ,\ (3,22)\}$$

لاحظ أن عكس ترتيب الضرب يؤدي إلى مصطلح دون معنى، لأن عدد الخانات في السطر لا يساوي عددها في العمود داخل المصفوفتين بذلك الترتيب.

مثال: لو كان لدينا العلاقتان

$$P = \{\ (1,a)\ ,\ (1,b)\ ,\ (2,c)\}$$

$$Q = \{ (a,11) , (d,22) , (b,11)\}$$

احسب العلاقة P_oQ؟

الحـــل: أولاً نحدد المجموعات بشكل صحيح بحيث Q تربط A مع B و P تربـــط B مع C:

$$A = \{a , b , d\},$$
$$B= \{ 1, 2, 11, 22\}$$
$$C = \{ a , b, c\}$$

لذا، تكون مصفوفة P_oQ هي مصفوفة Q مضروبة في مصفوفة P أي

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

أي المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذاً، العلاقة PoQ هي المجموعة الخالية. يمكن للطالب حساب QoP بعـــد حســـاب المجموعات الثلاث والمصفوفات مجدداً بما يتناسب مع هذا الترتيب. سيكون الجـواب في هذه الحالة هو

$$Q_oP = \{ (1,11) \}$$

1) P = {(1,1) , (1,2) , (2,3) , (2,4) , (3,4) , (4,1) , (4,2)}
Q = {(3,1) , (4,4) , (2,3) , (2,4) , (1,1) , (1,4)}

2) P= {(a,1) , (b,2) , (3,a)}
Q= {(1,4) , (5,2) , (6,3) , (7,4)}

3) P = {(a,1) , (2,x) , (b,4)}
Q= {(d,2) , (4,3) , (4,a)}

الفصل التاسع

علاقة الاتصال وطريقة وارشال

سنتطرق في هذا الفصل إلى معانٍ هندسية، من ضمنها المعنى الهندسي لعملية التركيب. إذا كانت لدينا علاقة R تربط المجموعة A مع نفسها، فإنه يمكن بالتأكيد حساب R_oR. بما أن التركيب له علاقة بالضرب، يمكن اعتبار مجازاً أن R_oR هي R في R أو رياضياً R^2. هذا تعريف جبري للمجموعة R^2. من ناحية هندسية العلاقة التي تربط مجموعة مع نفسها يتم تمثيلها من خلال شبكة موجهة. سنعرف R^2 هندسياً كالتالي: الزوج المرتب (x,y) ينتمي إلى R^2 إذا كان هنالك مسار من الدائرة x إلى الدائرة y عبر دائرة ثالثة (يمكن أن تكون إحدى هاتين الدائرتين في حال وجود سهم انعكاسي داخل الشبكة الموجهة). التعريف الجبري والهندسي للمجموعة R^2 يؤديان إلى نفس المجموعة، فهما تعريفان متكافئان . مثلاً، لو كان لدينا:

$$A = \{ 1, 2, 3, 5\}$$
$$R = \{ (1,2) , (1,3) , (2,3) , (3,5) \}$$

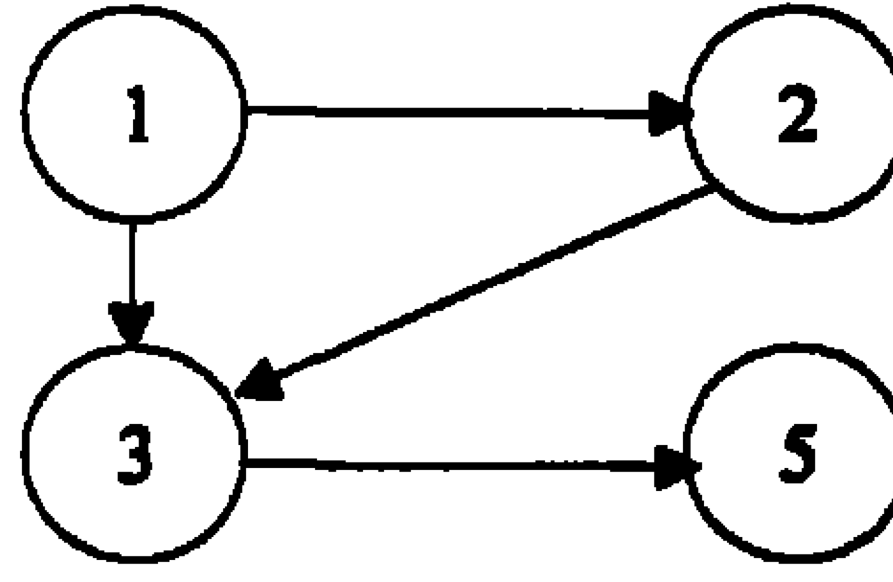
لحساب R^2 جبرياً ندرس الجدول التالي:

$1 \rightarrow 2$	$1 \rightarrow 2$
$1 \rightarrow 3$	$1 \rightarrow 3$
$2 \rightarrow 3$	$2 \rightarrow 3$
$3 \rightarrow 5$	$3 \rightarrow 5$

إمكانيات الدمج المختلفة تعطي

$$R^2 = R_oR = \{(1,3) , (1,5) , (2,5)\}$$

لو رسمنا الشبكة الموجهة للعلاقة R لنتج



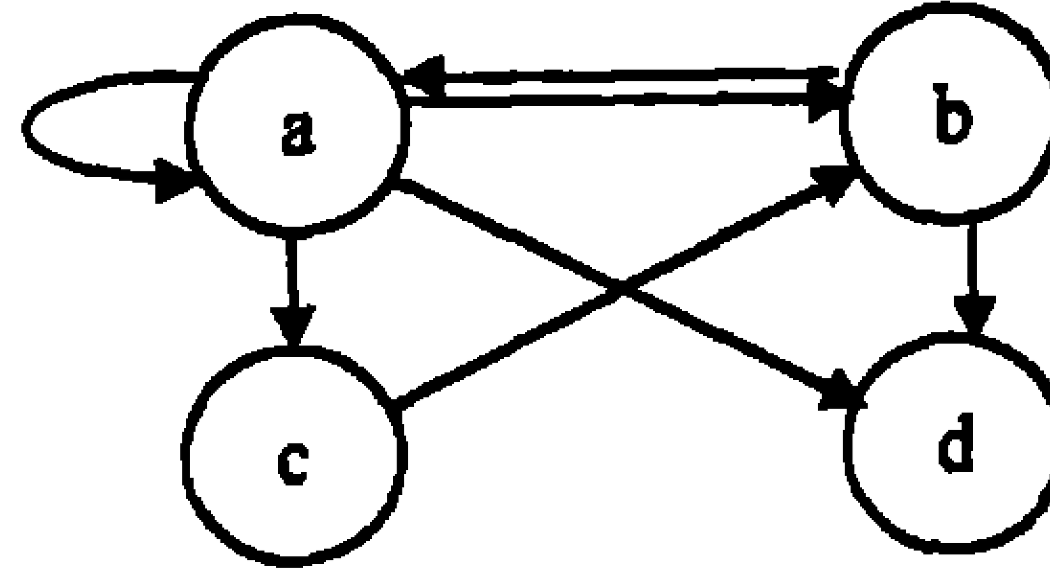
انطلاقاً من الدائرة 1 يوجد مسار يؤدي إلى الدائرة 3 عبر الدائرة 2 ومسار آخر يؤدي إلى الدائرة 5 عبر الدائرة 3. لذلك نستنتج أن الزوجان (1,3) و (1,5) ينتميان إلى العلاقة R^2. كذلك يوجد مسار ينطلق من الدائرة 2 إلى الدائرة 5 عبر الدائرة 3، مما يعني انتماء الزوج (2,5) إلى العلاقة R^2. هذه الأزواج الثلاثة هي فعلاً مكونات R^2 حسب التعريف الجبري. على نفس المبدأ يمكن تعريف R^3 بأنها R_oR_oR أو بأنها تضم الزوج (x,y) في حال وجود مسار من الدائرة x إلى الدائرة y عبر دائرتين. بناءاً على هذا التعريف الهندسي تعطي العلاقة السابقة النتيجة التالية:

$$R^3 = \{ (1,5) \}$$

يمكن بسهولة حساب R^3 جبرياً والتأكد من مطابقتها لهذه النتيجة.

يمكن النظر إلى R^2 على أنها علاقة تشمل الأزواج التي يرتبط عنصر الخانة الأولى مع عنصر الخانة الثانية بطريق يستخدم سهمين. بهذا الفهم تكون R^1 هي نفسها R، وهذا لا يناقض مفهوم القوة 1 حيث أن أي عدد قوة 1 هو العدد نفسه. سنعرف الآن علاقة تحتوي على جميع قوى العلاقة R من واحد فصاعداً، أي أننا سنعرف مجموعة تحتوي على R^1 و R^2 و R^3 وهلم جرا كمجموعات جزئية منها. حسب مبتغانا نطلب أن تكون العلاقة الجديدة شاملة لجميع الأزواج التي يرتبط عنصر خانتها الأولى مع عنصر خانتها الثانية بطريق يستخدم عدد غير محدود من الأسهم. بمعنى قد يكون الطريق يستخدم سهم أو سهمين أو ثلاثة وهلم جرا. هذه العلاقة تسمى علاقة الاتصال ويرمز لها بالرمز R^{∞}. يدل هنا رمز اللالانهاية على عدم تحديد عدد الأسهم

المستخدمة في الانتقال من دائرة إلى أخرى. مثلا، في الشبكة الموجهة التالية:



تكون R هي المجموعة التالية:

{ (a,a) , (a,b) , (a,c) , (a,d) , (b,a) , (b,d) , (c,b)}

لاحظ أننا رتبنا الأزواج كأنها كلمات مرتبة أبجديا. كما تكون R^2 هي المجموعة التالية:

{ (a,a) , (a,b) , (a,c) , (a,d) , (b,a) , (b,b) , (b,c) , (c,a) , (c,d)}

أما R^3 فهي المجموعة

{ (a,a) , (a,b) , (a,c) , (a,d) , (b,a) , (b,b) . (b,c) , (b,d) , (c,a) ,
(c,b) . (c,c) , (c,d)}

لاحظ أن سهم الدائرة a الانعكاسي أدى إلى بقاء أزواج العلاقة الأصلية المحتوية على a في R^2 و R^3 بسبب إمكانية استخدامه عدة مرات. إن استخدام سهم a الانعكاسي لا يؤدي عمليا إلى الحصول على أزواج غير موجودة في العلاقة الأصلية R عند حساب R^2. للحصول على أزواج جديدة في R^n حيث n أكبر من ثلاثة لا يفيد استخدامه. بمعنى آخر لن نحصل من خلال حساب R^n على أية أزواج جديدة، إذا كانت n أكبر من 3. بالتالي أزواج R^{∞} هي الأزواج التي ظهرت إما في R أو R^2 أو R^3، مما يؤدي إلى أن

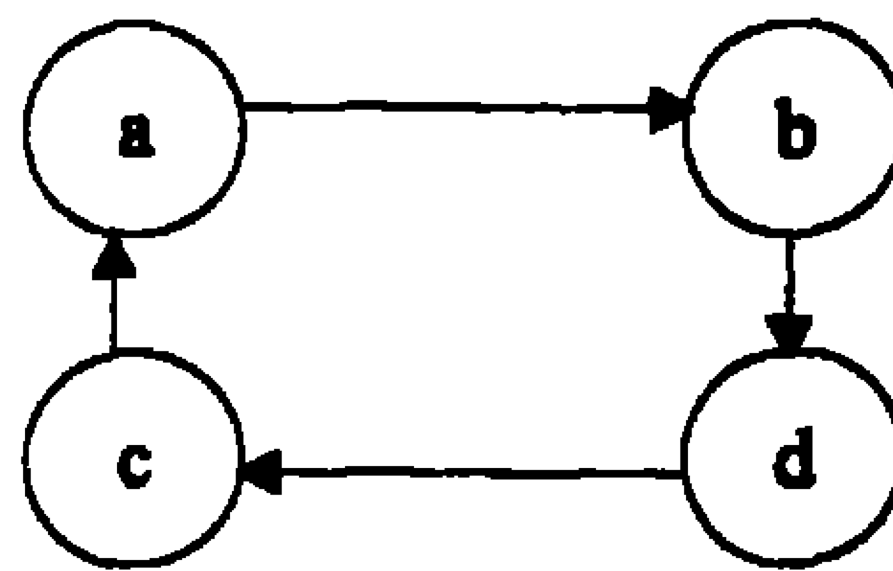
R^{∞} = { (a,a) , (a,b) , (a,c) , (a,d) , (b,a) , (b,b) , (b,c),
(b,d) . (c,a) , (c,d) , (c,c) , (c,d)}

في الواقع التفكير السابق جزء من إثبات نظرية تقول:

إذا كان عدد عناصر المجموعة A يساوي n فإن R^{∞} تكون عبارة عن الاتحاد

$$R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$$

قد يتساءل المرء، لماذا اشتملت النظرية على R^n كنهاية و لم تقف كما في المثال عند R^{n-1}؟ هذا الوقوف الاحتياطي عند R^n، التي قد لا تضيف شيئاً كما في المثال السابق، يكون ضرورياً أحياناً إذا انطلقت الأسهم من الدائرة d أيضاً. مثلاً، لو كانت الشبكة كالتالي:



لوجدنا الزوج (a,a) في R^4 بالرغم من عدم ظهوره في R أو R^2 أو R^3. يمكن للطالب التأكد من أن R^{∞} هنا هي فعلاً

$$R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$$

أي إن R^{∞} هي المجموعة AxA.

توجد طريقة جبرية لحساب علاقة الاتصال R^{∞} باستخدام المصفوفات. تنسب هذه الطريقة إلى مبتكرها وارشال. كما أسلفنا نأخذ علاقة تربط بمجموعة A مع نفسها من أجل حساب R^{∞}. أي تكون مصفوفة العلاقة مصفوفة مربعة. ترتكز فكرة طريقة وارشال على العمل بهذه المصفوفة حيث نأخذ السطر والعمود من نفس المصفوفة. لكن، هذه المرة سنأخذ السطر الأول مع العمود الأول ثم السطر الثاني مع العمود الثاني وهلم جرا إلى انتهاء الأسطر (وطبعاً الأعمدة). كما أننا سنبدأ بالعمود أولاً ثم ننتقل إلى السطر بعكس الترتيب الأبجدي للحروف وذلك لأنه بالإنجليزية كلمة عمود (column) تأتي أبجدياً قبل كلمة سطر (row). الآن سنشرح طريقة وارشال من خلال هذا المثال البسيط: لدينا التالي

$$A= \{1,2\} , R= \{ (1,2) , (2,1)\}$$

مصفوفة هذه العلاقة هي

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

سنرمز لهذه المصفوفة بالرمز W_o، أي مصفوفة الانطلاق من الصفر في طريقة وارشال. لو نظرنا إلى العمود الأول في W_o لوجدنا أن العدد 1 يقف في الخانة الثانية من العمود. ولو نظرنا إلى السطر الأول في W_o لوجدنا أن العدد 1 يقف في الخانة الثانية من السطر. هذا معناه أننا سنذهب إلى الخانة الناتجة عن تقاطع العمود الثاني مع السطر الثاني في مصفوفة الناتج ونضع هنالك العدد 1. مصفوفة الناتج تكون بنفس حجم المصفوفة W_o ، وبالتالي تحتوي على أربع خانات. لقد رأينا كيف أن W_o تحدد موقع للعدد 1 في المصفوفة الجديدة. ولكن ماذا عن بقية المواقع (الخانات) الثلاث؟ الإجابة هي أن نعود وننظر إلى W_o، ثم نعوض كل خانة فارغة بنفس القيمة الموجوده في W_o. هذا الإجراء يؤدي إلى تشكل المصفوفة الجديدة

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

يرمز لهذه المصفوفة بالرمز W_1، أي المصفوفة الأولى التي تم حسابها في طريقة وارشال. لاحظ أن طريقة وارشال تزيد من عدد الخانات المحتوية على واحد عن مصفوفة الانطلاق، مما يعني انضمام أزواج جدبدة للعلاقة الأصلية. طبعا، من المعروف أن علاقة الاتصال تكون أشمل من العلاقة الأصلية مما يتماشى مع طريقة العمل بالمصفوفات. لكن، الطريقة تحتاج إلى خطوة ثانية حيث ندرس فيها العمود الثاني مع السطر الثاني. في العمود الثاني من المصفوفة الأخيرة W_1 نجد العدد 1 في الخانة الأولى والثانية، وفي السطر الثاني من W_1 نجد العدد 1 في الخانة الأولى والثانية. هذا معناه يجب أن نبحث عن مواقع التقاطعات المحتملة للسطر الأول والثاني مع العمود الأول والثاني. عدد التقاطعات المحتملة هو أربع وهم جميع خانات المصفوفة الجديدة. أي،

المصفوفة الناتجة من W_1 تكون

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

يرمز لهذه المصفوفة بالرمز W_2. عند هذه اللحظة تقف الطريقة لأننا درسنا العمود الأول مع السطر الأول في W_0 والعمود الثاني مع السطر الثاني في W_1. لو كانت المصفوفة الأصلية مكونة من ثلاثة أسطر وثلاثة أعمدة، لاستمرت حساباتنا وحسبنا من W_2 مصفوفة جديدة اسمها W_3 باستخدام السطر الثالث والعمود الثالث. الآن، يجب علينا تحويل المصفوفة التي توقفنا عندها إلى علاقة الاتصال. هذا يتم كما تعودنا بتفسير العدد 1 على أن معناه وجود الزوج المرتب. لذا علاقة الاتصال تكون حسب W_2 هي

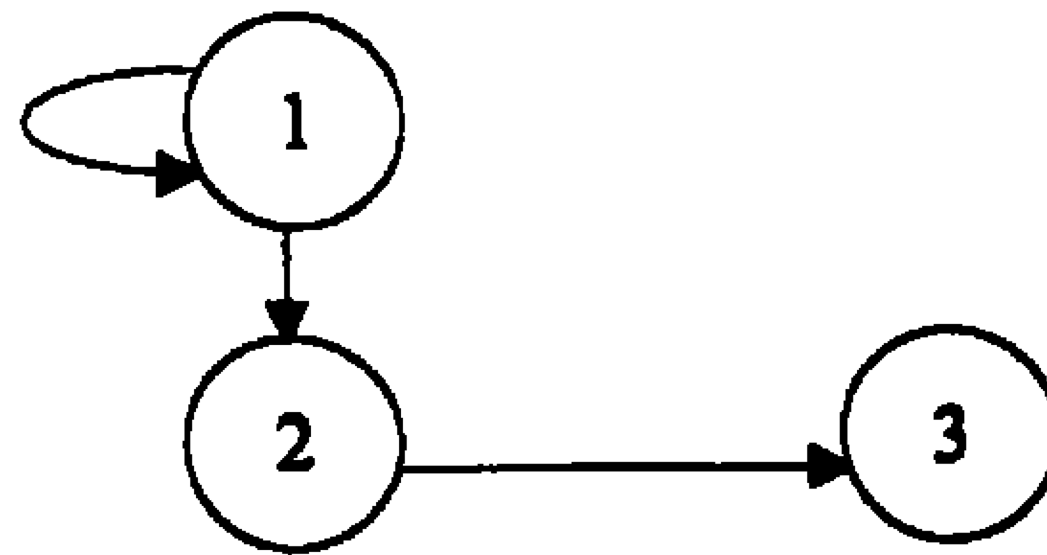
$$\{(1,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,1)\ ,\ (2,2)\}$$

يمكن للطالب من خلال رسم بسيط التأكد من أن R^∞ للعلاقة R في المثال هي فعلا علاقة الاتصال التي تم حسابها. سنأخذ مثالا أعقد قليلا: لدينا

A= {1,2,3}

R= {(1,1) , (1,2) , (2,3)}

هندسيا الشبكة الموجهة للعلاقة R هي



وبالتالي R^∞ يجب أن تكون

$$\{(1,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (1,3)\ ,\ (2,3)\}$$

المصفوفة W_0 هي المصفوفة الأصلية للعلاقة R أي

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

في العمود الأول يقف العدد 1 في الخانة الأولى، وفي السطر الأول يقف العـــدد 1 في كل من الخانة الأولى والثانية لذا، سنضع في المصفوفة الجديدة مكان التقــاء الســطر الأول مع كل من العمود الأول والعمود الثاني العدد 1، بينما نبقي على بقية الخانــات كما هي في W_o. بالتالي، تنتج لدينا المصفوفة W_1 على الصورة

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

٧ ـظ عدم تغير شيء في المصفوفة W_1 عن W_o. قد يحدث هذا أحيانا، لكنــه ليــس سببا للوقوف. الخطوة التالية تكون باستخدام W_1 لحساب W_2. ننظر إلى العمود الثاني والسطر الثاني في W_1 بالترتيب: في العمود الثاني يوجد واحــد في الخانــة الأولى وفي السطر الثاني يوجد واحد في الخانة الثالثة. لذا، تحتوي المصفوفة الجديدة W_2 في خانــة التقاء السطر الأول مع العمود الثالث على الرقم واحد. ما عدا ذلك الخانات تكــون كما كانت في W_1 . إذا، نستنتج أن

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بقي علينا خطوة أخيرة، إلا وهي حساب W_3 من W_2. في العمود الثالث من W_2 نجد واحد في الخانة الأولى والثانية، لكن في السطر الثالث من W_2 لا نجد العدد واحد أبدا. عدم وجود العدد واحد سواء في السطر أو العمود يعني أن لا شيء يتغير. بمعنى آخــر تكون W_3 مطابقة للمصفوفة W_2، أي مصفوفة الوقوف هي

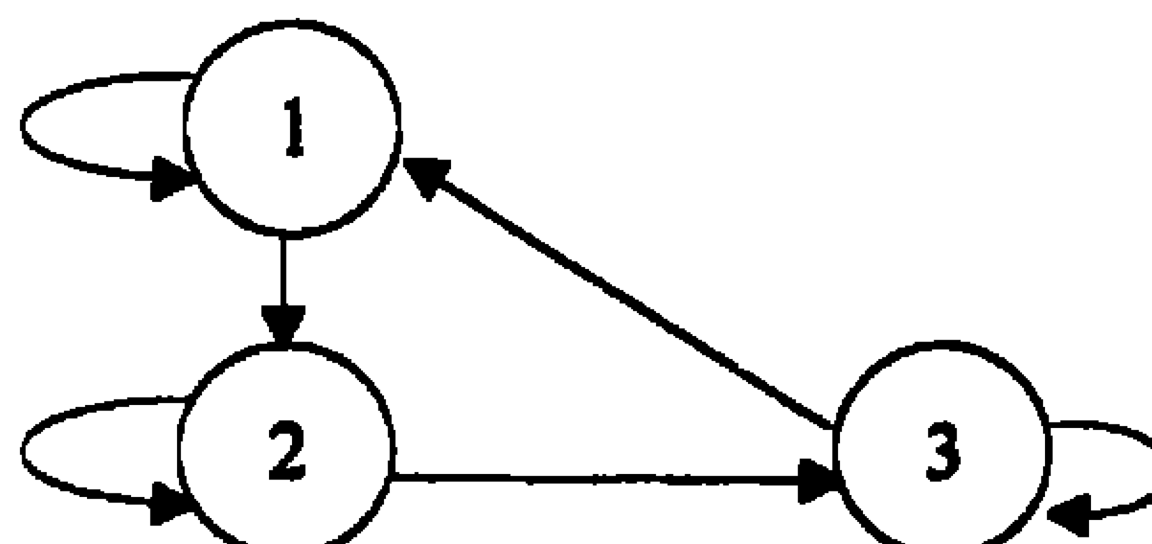
$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

عند تحويل هذه المصفوفة إلى علاقة تحصل على

{(1,1) , (1,2) , (1,3) , (2,3)}

لاحظ أننا حصلنا على نفس الجواب المتوقع.

<u>مثـــــال:</u> لدينا الشبكة الموجهة للعلاقة R كالتالي:



سنحسب R^∞ باستخدام طريقة وارشال:

$$Wo = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لحساب W_1 نجري العملية التالية:

1. column / 1. row

1 , 3 / 1 , 2

أي سنضع في أربع خانات من W_1 العدد 1 بصورة اكيدة وهذه الخانات هي

1/1 , 1/2 , 3/1 , 3/2

لاحظ أننا نفسر الخانة 3/2 على أنها التقاء السطر الثالث مع العمـــود الثـــاني في W_1،

وبالتالي

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

نحسب W_2 من W_1 من خلال تحديد خانات العدد 1 التي قد تغـــير الوضـــع القـــديم كالتالي:

2. column / 2. row

1 , 2 , 3 / 2 , 3

أي خانات العدد 1 يجب أن تكون الخانات التالية:

1/2 , 1/3 , 2/2 , 2/3 , 3/2 , 3/3

إضافة إلى خانات الواحد الأخرى في W_1. لذا ، نحصل على

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

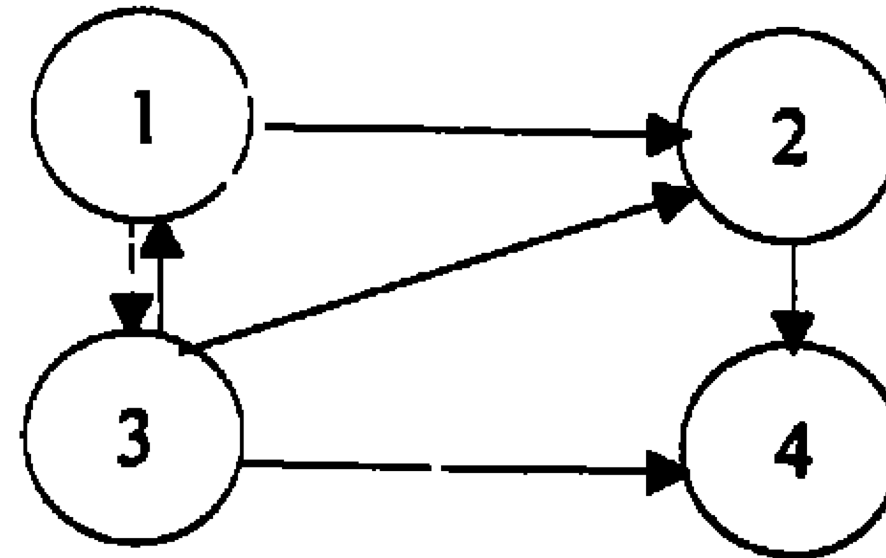
أخيرا، نحسب W_3 من W_2 نعرف أن

3. column / 3.row
1 , 2 , 3 / 1 , 2 , 3

أي جميع خانات W_3 تتكون من العدد 1. بهذا نكون قد وصلنا إلى أن علاقة الاتصـــال R^∞ هي AxA حيث

$$A = \{1 , 2 , 3\}$$

<u>مثـــال</u>: لدينا الشبكة الموجهة للعلاقة R كالتالي:



وبالتالي:

$$W_o = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

1. column / 1. Row
3 / 2 , 3

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. column / 2. row
1 , 3 / 4

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

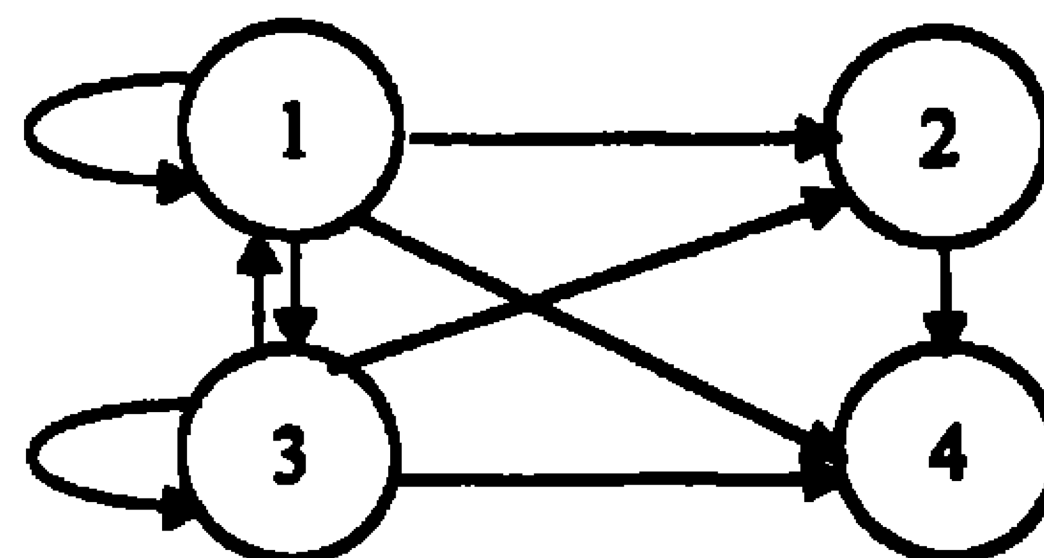
3 . column / 3. row
1 , 3 / 1 , 2 , 3, 4

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. column / 4. row
1 , 2 , 3 / nothing

$W_4 = W_3$

لذلك تكون الشبكة الموجهة للعلاقة R^∞ هي



الفصل العاشر
عملية الإغلاق

في الرياضيات الفترة المفتوحة هي الفترة بين عددين بحيث يكون هذان العددان غير موجودان (تابعان) للفترة. بينما الفترة المغلقة هي تلك الفترة المفتوحة التي يضم لها العددان على الطرفين، فيصبحا تابعين للفترة. إذاً، عملية إغلاق الفترة هي عبارة عن إضافة أطراف الفترة إليها. انطلاقاً من هذه الفلسفة سنطلق على عملية إضافة أزواج مرتبة لعلاقة تفتقر إلى صفة ما عملية إغلاق هذه الصفة بحيث تصبح الصفة موجودة. سنهتم تحديداً بعملية إغلاق الصفات الثلاث: الانعكاسية، الانتقالية والتماثلية. لنبدأ بعملية إغلاق صفة الانعكاسية. إذا كانت علاقة تفتقر إلى صفة الانعكاسية، فإنه يوجد بعض العناصر من المجموعة A التي لا ترتبط مع نفسها. إضافة الأزواج المرتبة التي تحتوي على هذه العناصر في خانتها الأولى والثانية إلى العلاقة سيجعل العلاقة حتماً انعكاسية. لإعطاء هذه الفكرة صورة رياضية سنعرف علاقة التطابق على مجموعة A كالتالي:

$$I = \{ (x,x) : \forall x \in A \}$$

أي علاقة التطابق I تضم جميع الأزواج التي يرتبط فيها العنصر مع نفسه فقط. الآن، عملية إغلاق صفة الانعكاسية لعلاقة R تؤدي إلى العلاقة الجديدة

$$R^+ = R \cup I$$

لاحظ أن العلاقة الجديدة تختلف عن الأصلية برمز زائد أعلى حرف R مما يدل على إضافة بعض الأزواج. نحن لا نعرف بشكل عام ما هي الأزواج الناقصة، لكن عملية الاتحاد تكفل لنا بأن تنضم الأزواج التي أخلّ فقدانها بصفة الانعكاسية إلى العلاقة.

طبعاً، لو وجدت بعض الأزواج من المجموعة I في العلاقة R فما ستبقى موجودة مرة واحدة فقط بعد الاتحاد. مثلاً، لدينا

$A = \{1 , 2 , 3 , 4\}$
$R = \{ (1 , 2) , (3 , 3) \}$

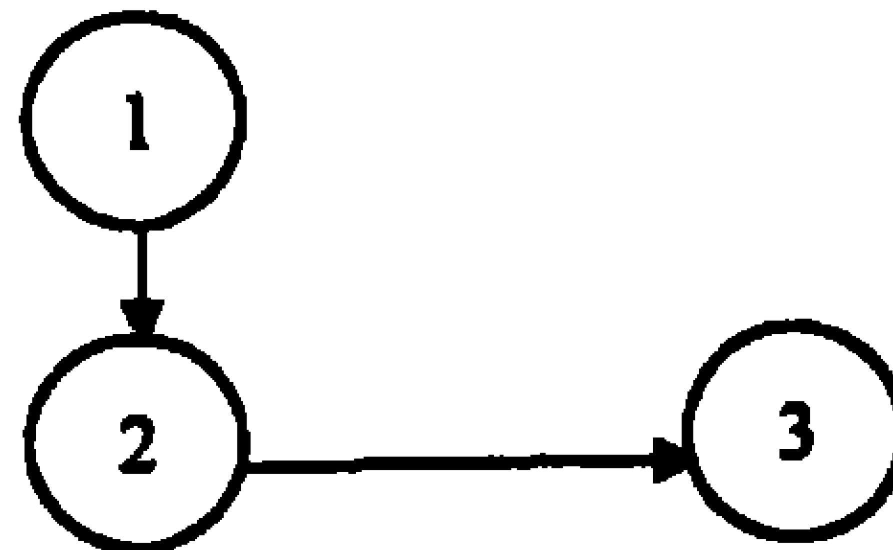
إغلاق صفة الانعكاسية للعلاقة R يعطي العلاقة الجديدة.

$R^{+} = \{ (1,2) , (3,3) \} \cup \{ (1,1) , (2,2) , (3,3) , (4,4)\} =$
$\{ (1,1) , (1,2) , (2,2) , (3,3) , (4,4) \}$

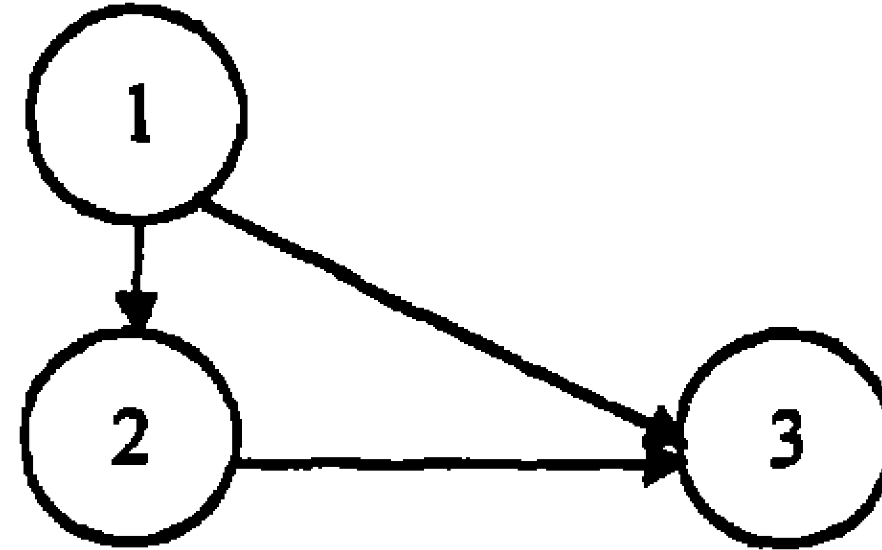
يجدر بالملاحظة أن عملية الإغلاق لصفة الانعكاسية لا تحدث تغييراً على العلاقة، إذا كانت هذه العلاقة ذات صفة انعكاسية في الأصل. هذا الكلام ينطبق على إغلاق صفتي الانتقالية والتماثلية، فالإغلاق يؤدي إلى إضافة أزواج نفتقدها. إذا لم تكن العلاقة تفتقد إلى أزواج معينة لجعلها تحمل صفة ما، فإن عملية الإغلاق لها لا تضيف شيئاً. بالنسبة لإغلاق صفة الانتقاليه، فإنه توجد نظرية تعطينا الحل:

عملية إغلاق صفة الانتقالية للعلاقة R تؤدي إلى R^{∞} أي إن R^{∞} (علاقة الاتصال) هي في الوقت ذاته الإغلاق الانتقالي للعلاقة R.

لقد لاحظنا في الفصل السابق أن R^{∞} تكون أوسع من R وأنه في طريقة وارشال لحساب R^{∞} يبدأ عدد الخانات ذات القيمة 1 بالازدياد، مما يعني انضمام أزواج جديدة إلى العلاقة R عند تشكيل العلاقة R^{∞} . هذه الأزواج الجديدة تعمل على إضافة الأزواج الناقصة التي تجعل بعض الانتقالات غير صحيحة إلى العلاقة. مثلاً، في الشبكة الموجهة



يوجد انتقال واحد وهو المسار من الدائرة 1 إلى الدائرة 3 عبر الدائرة 2. هذا الانتقال لا يوجد له اختصار مباشر لأن السهم من الدائرة 1 إلى الدائرة 3 غير موجود. لذا، الشبكة حالياً لا تمثل علاقة انتقالية. لو حسبنا R^{∞} بطريقة وارشال أو بالطريقة الهندسية لاكتشفنا بأن الشبكة الموجهة للعلاقة R^{∞} هي



فعلاً، تمت إضافة الاختصار المباشر لكي يصبح الانتقال صحيحاً. بذلك تكون العلاقة الجديدة علاقة انتقالية. يجدر بالذكر هنا أن طريقة وارشال توضح لنا كيفية تمييز العلاقة الانتقالية عن غيرها. إذا كانت العلاقة انتقالية، فإن عملية الإغلاق الانتقالية لن تغير شيئاً في العلاقة. لذا، عند فحص العلاقة انتقالية أم لا، نبدأ بحساب W_1 من W_0 كما نفعل في طريقة وارشال. إذا كانت W_1 مطابقة تماماً للمصفوفة W_0، فإن شيئاً لم يتغير ونتابع المسير. أما إذا اختلفت W_1 عن W_0، فإنه قد تمت إضافة أزواج جديدة إلى العلاقة الأصلية. في هذه اللحظة نتوقف ونستنتج أن العلاقة الأصلية لم تكن انتقالية. إذا لم يحدث اختلاف وتابعنا المسير، فإننا نحسب W_2 من W_1. نعيد تطبيق الفكرة السابقة التي مفادها أن المقارنة بين المصفوفتين تؤدي إلى احتمالين:

أ- يوجد اختلاف وهذا يعني أن العلاقة غير انتقالية (ويجب الوقوف).

ب- لا يوجد اختلاف وهذا يعني متابعة المسير (حتى النهاية).

إذا استمرت حساباتنا للمصفوفات إلى انتهاء عملية وارشال بشكل طبيعي دون حدوث أي تغيير من مصفوفة إلى المصفوفة اللاحقة، فهذا معناه أن العلاقة الأصلية كانت انتقالية.

بقي علينا شرح عملية إغلاق صفة التماثل. في الشبكة الموجهـــة لعلاقـــة غـــير متماثلة توجد أسهم تذهب من دائرة إلى أخرى ولا تعود. لجعل العلاقة تصبح متماثلـة يجب إضافة الأسهم في الاتجاه المعاكس بين كل دائرتين يربط بينهما ســـهم واحـــد. الشبكة الموجهة الناتجة تمثل العلاقة الجديدة، والتي سنرمز لهـــا بـــالرمز R^s (الإغـــلاق التماثلي). لوصف طريقة حساب R^s جبرياً، سنعرّف مفهوم العلاقة العكسية R^{-1}. لـــو قمنا بعكس ترتيب الخانتين في جميع الأزواج المرتبة للعلاقة R، لحصلنا علـــى الأزواج المرتبة للعلاقة R^{-1}. مثلاً، العلاقة التالية:

$$R = \{ (1,2) , (2,2) , (3,4)\}$$

لها العلاقة العكسية

$$R^{-1}= \{ (2,1) , (2,2) , (4,3)\}$$

عكس الخانتين داخل الزواج المرتب يعني هندسياً انعكاس اتجاه السهم بين الدائرتـــين. كما ورد سابقاً يجب في عملية الإغلاق التماثلي إضافة أسهم معاكسة، أي بلغة أخرى إضافة أزواج R^{-1} إلى أزواج R. لذلك، يمكن القول أن

$$R^s = R \cup R^{-1}$$

<u>**مثـــال:**</u> لدينا

$$A = \{ 1 ,2 , 3, 4\}$$
$$R = \{ (1,1) , (2,1) , (1,2) , (3, 4)\}$$

العلاقة R ليست متماثلة والإغلاق التماثلي R^s يساوي

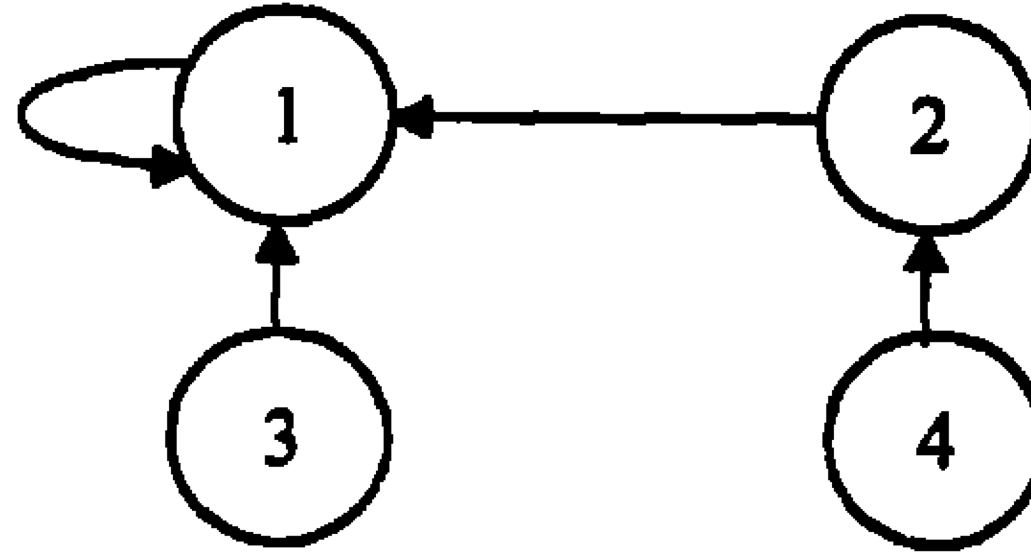
$$\{ (1,1) , (2,1) , (1,2) , (3,4) ,\} \cup \{ (1,1) , (1,2) , (2,1) , (4,3)\} =$$
$$\{ (1,1) , (1,2) , (2,1) , (3,4) , (4, 3)\}$$

قد يخطر على البال السؤال حول إمكانية تطبيق أكثر من عملية إغلاق على نفس العلاقة في آنٍ واحد. بالنسبة لعملية الإغلاق الانعكاسي تليها عملية الإغلاق الانتقـــالي يوجد رمز خاص وهو R^*. النجمة تدل على إشارتي زائد ملتحمتان، أي النجمة تـــدل

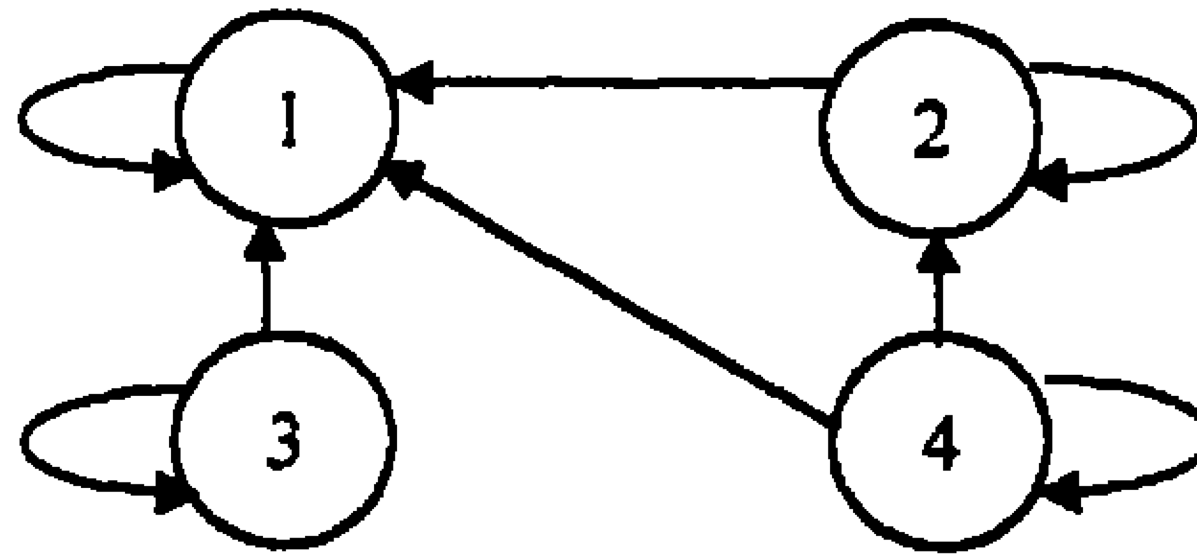
على عمليتي الإغلاق الانعكاسي والانتقالي. لقد ثبت أن الترتيب في إجراء العمليتين غير مهم، ولذا لا نحتاج لإيضاح أية عملية تأتي قبل الثانية. مثلاً، لدينا

$$A = \{1 , 2 , 3 , 4\}$$
$$R = \{ (1,1) , (2,1) , (3,1) , (4 ,2)\}$$

الشبكة الموجهة للعلاقة R هي



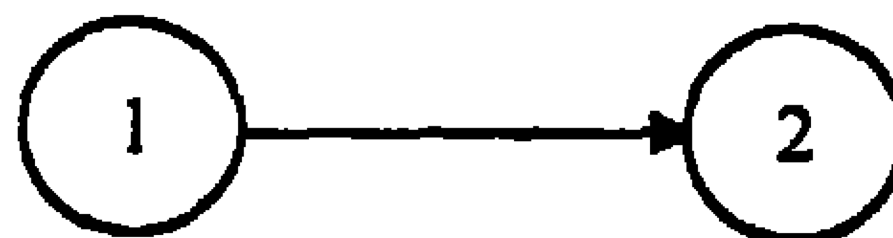
هندسياً، العلاقة *R تتمثل من خلال



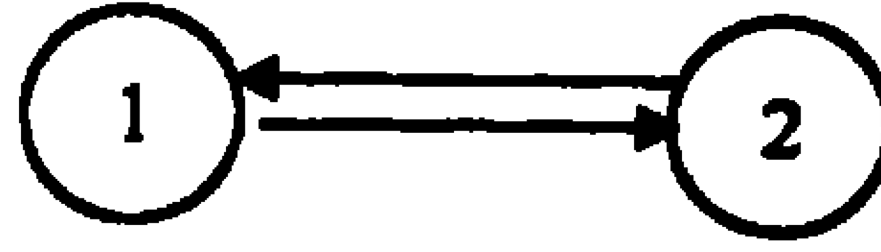
إجراء عمليتي الإغلاق الانعكاسي والتماثلي معاً هو إجراء آخر من النوع الذي لا يؤثر فيه ترتيب العمليات. في الواقع هذا الموضوع ليست له أهمية تذكر في التطبيقات. لكن، إجراء عمليتي الإغلاق الانتقالي والتماثلي معاً يؤدي عادةً إلى نتائج تختلف حسب ترتيب العمليتين. لقد استطاع العلماء إثبات النظرية التالية:

$$(R^{\infty})^{s} \subset (R^{s})^{\infty}$$

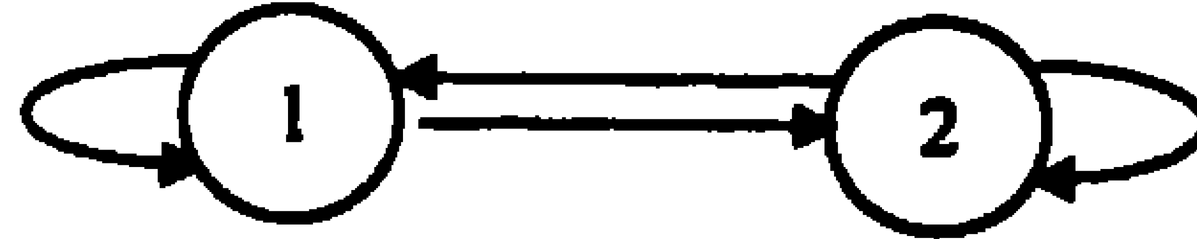
أي إن إغلاق العلاقة بشكل انتقالي ثم تماثلي يعطي مجموعة محتواة داخل مجموعة ناتجة عن إغلاق العلاقة بشكل تماثلي يليه انتقالي. كمثال بسيط على النظرية السابقة للنظر إلى:



في هذه الحالة تكون R^{∞} هي نفسها R وبالتالي $(R^{\infty})^{s}$ تمثلها الشبكة التالية:



أما R^{s} فتمثلها هذه الشبكة الجديدة وبالتالي $(R^{s})^{\infty}$ تمثلها الشبكة التالية:



لاحظ أن الشبكة الثانية تحتوي على أسهم أكثر من الشبكة الأولى. سنورد ختاماً بعض النظريات مع أمثلة توضيحية:

نظرية: إذا كانت لدينا علاقة R، فإن العلاقة

$$S = ((R^{+})^{s})^{\infty}$$

هي علاقة تكافؤ تحتوي على R. وإذا أخذنا أية علاقة تكافؤ أخرى V محتوية على R، فإنه يتحقق

$$S \subset V$$

بسبب الشرط الثاني تدعى العلاقة S بأصغر علاقة تكافؤ محتوية على R، أو علاقة التكافؤ التي تنتجها R. كمثال توضيحي سننظر إلى العلاقة التالية:

$$R = \{ (1,1) , (1,2) , (1,3) \}$$

يمكن التأكد من أن أصغر علاقة تكافؤ تحتوي على R هي A x A حيث

$$A = \{1 , 2 , 3 \}$$

هذا معناه أنه يوجد صف تكافؤ واحد وهو A.

نظرية: إذا كانت لدينا علاقتي تكافؤ P و Q، فإن تقاطعهما $P \cap Q$ يعطي علاقة تكافؤ جديدة. صفوف التكافؤ في علاقة التقاطع تتكون كنتيجة لتقاطع صفوف تكافؤ P مع صفوف تكافؤ Q.

كمثال توضيحي لتكن لدينا العلاقتين:

$P = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$
$Q = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)\}$

P لديها صفي تكافؤ وهما

$\{1, 2\} \quad , \quad \{3, 4\}$

Q لديها صفي تكافؤ وهما

$\{1, 3\} \ , \{2, 4\}$

العلاقة $P \cap Q$ هي العلاقة التالية:

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

هذه علاقة تكافؤ ولها كصفوف تكافؤ المجموعات

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

لاحظ أن التقاطعات الأربعة بين صفي P وصفي Q يؤديـــان إلى هــذه المجموعــات الأربع.

نظريـــة: إذا كانت لدينا علاقتي تكافؤ P و Q، فإن العلاقة

$L = (P \cup Q)^{\infty}$

هي علاقة تكافؤ تحتوي على اتحاد P مع Q. إذا كانت لدينا علاقة تكافؤ M تحتـــوي على P و Q معاً، فإنه يتحقق

$L \subset M$

أي العلاقة L هي أصغر علاقة تكافؤ تحتوي على P و Q معاً.

لو عدنا إلى المثال السابق لوجدنا أن L هي العلاقة AxA حيث

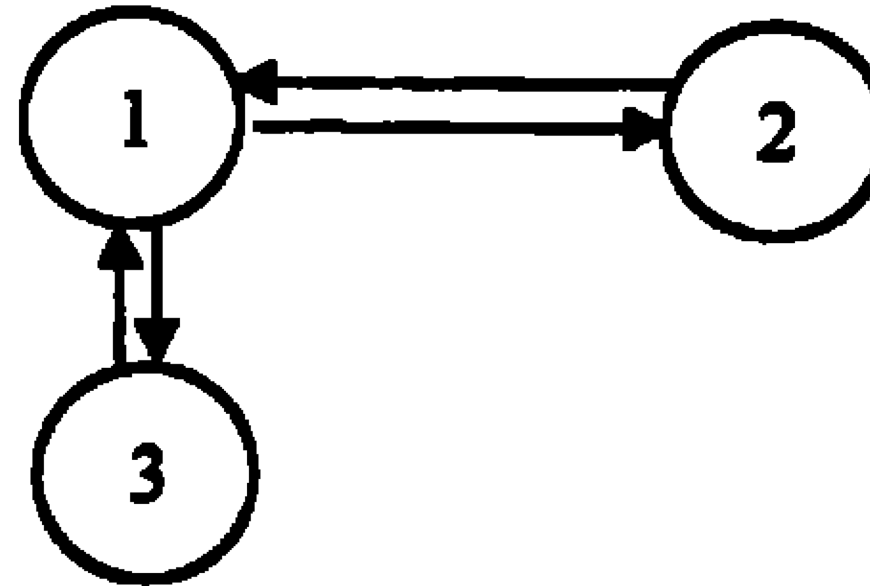
$A = \{1, 2, 3, 4\}$

نظرية: إذا كانت R علاقة متماثلة، فإن R^{∞} هي أيضاً علاقة متماثلة.

مثلاً، لو كان لدينا

$A = \{1, 2, 3\}$

وكانت الشبكة الموجهة للعلاقة R هي



فإن R^{∞} هي العلاقة المتماثلة

$A \times A$

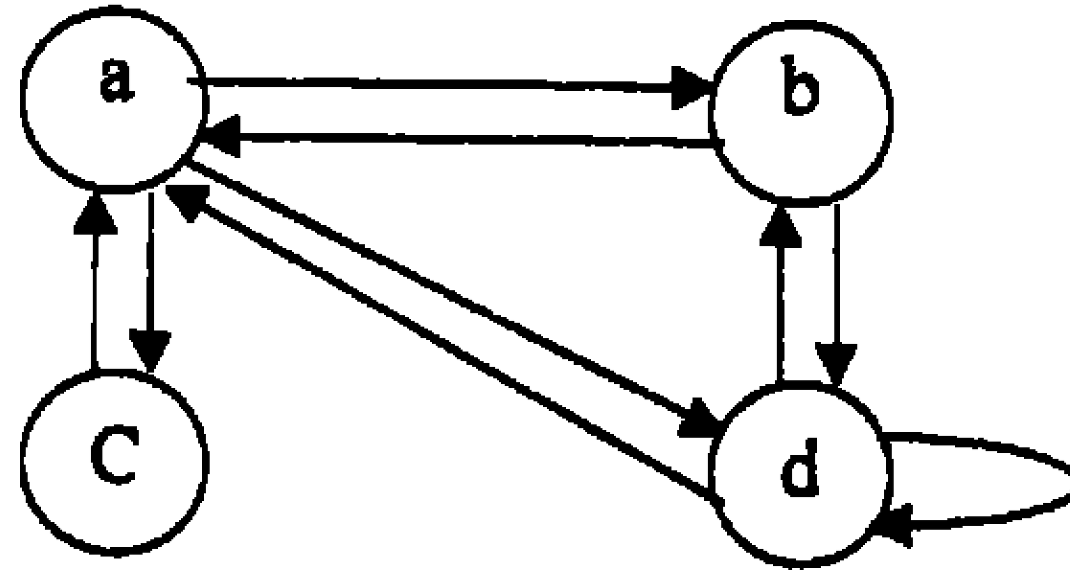
الباب الثالث

نظرية البيان

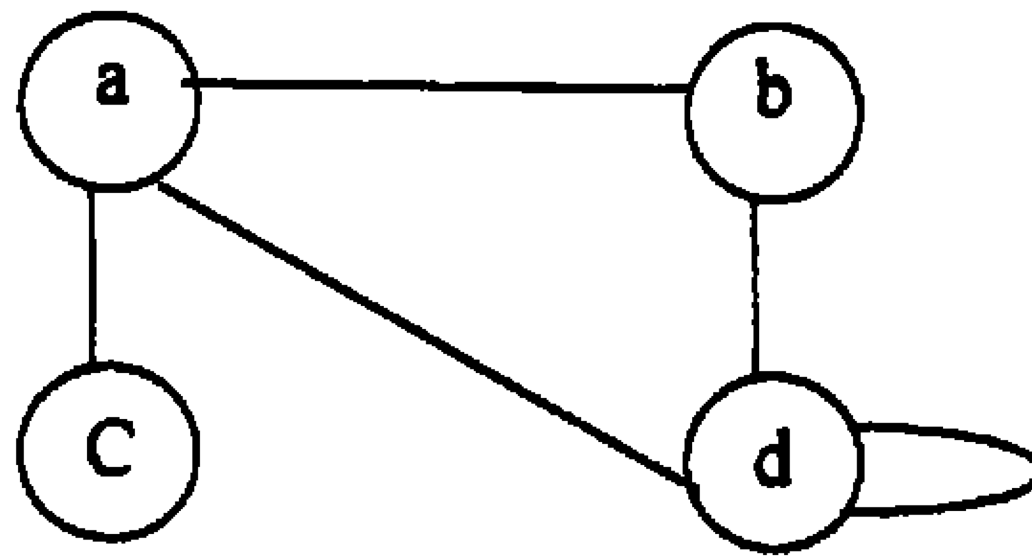
الفصل الأول

مبادئ أساسية

لو أخذنا الشبكة الموجهة التالية لعلاقة متماثلة:

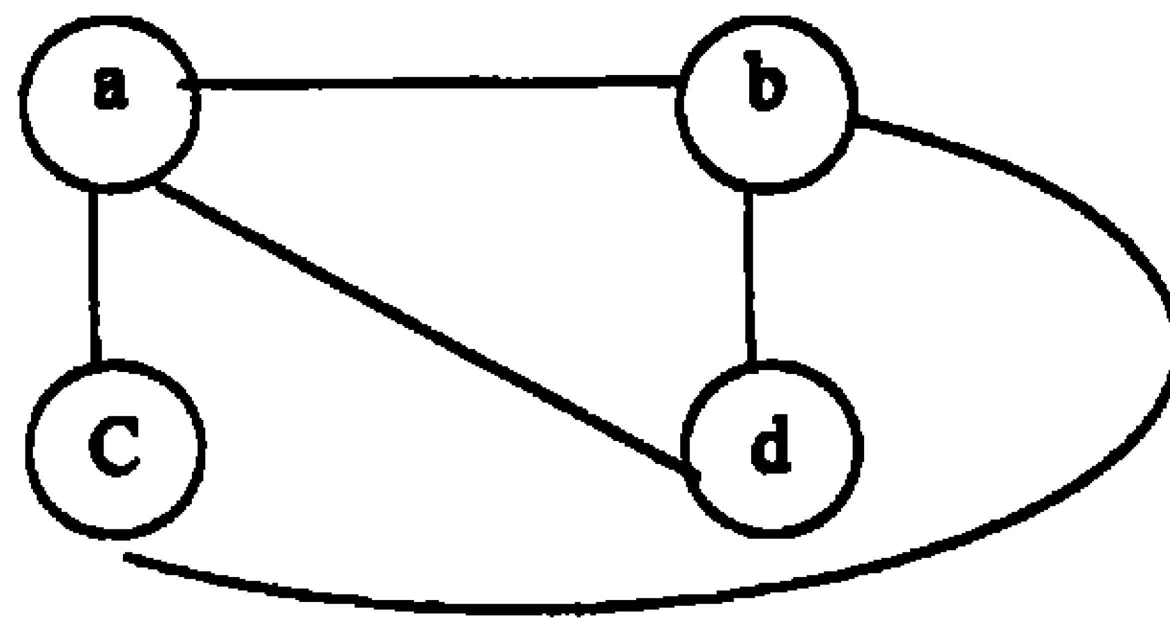


فإنه يمكن اختصار (دمج) السهمين المتعاكسين من خلال سهم واحد دون اتجـــاه. أي يصبح الشكل كالتالي:

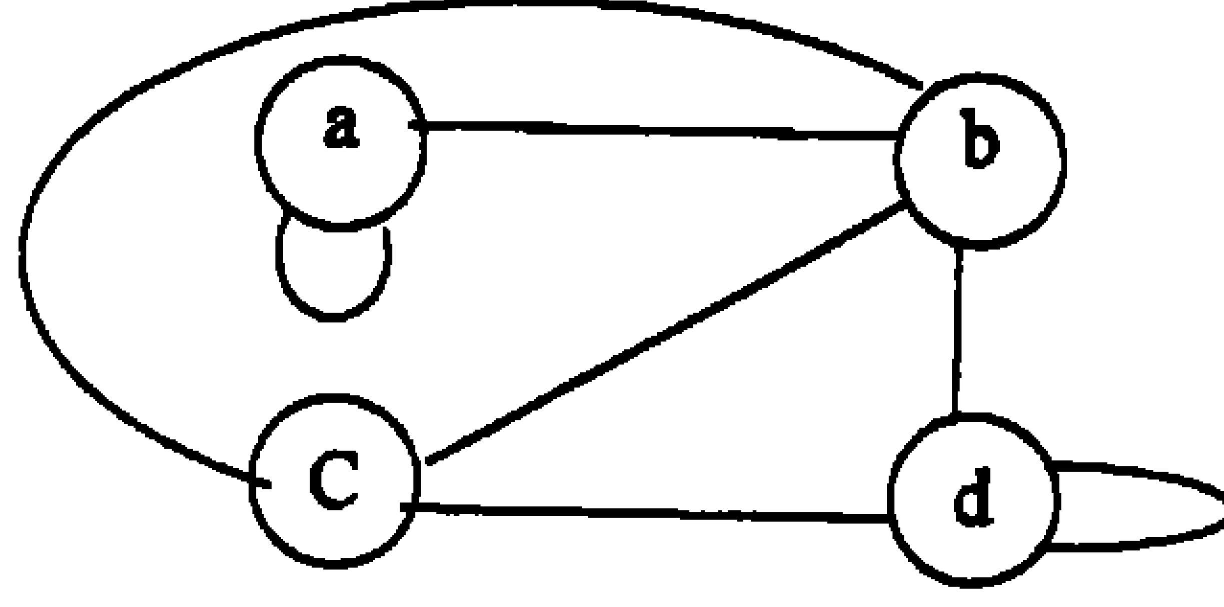


هذا الشكل يدعى شبكة غير موجهة أو بيان. هذا الشكل يعبر عـــادةً عـــن خارطـــة للطرق بين أربع مدن حيث يكون الطريق سالك في اتجاهين بما فيهم الطريق مـــن d إلى d. هذا الطريق يسمى الآن بطريق التفافي. تسمى الدوائر في نظرية البيـــان بـــالرؤوس وتسمى الطرق بالأضلع. سنعرّف درجة الرأس في البيان على أنها عدد الأضلـــع الـــتي

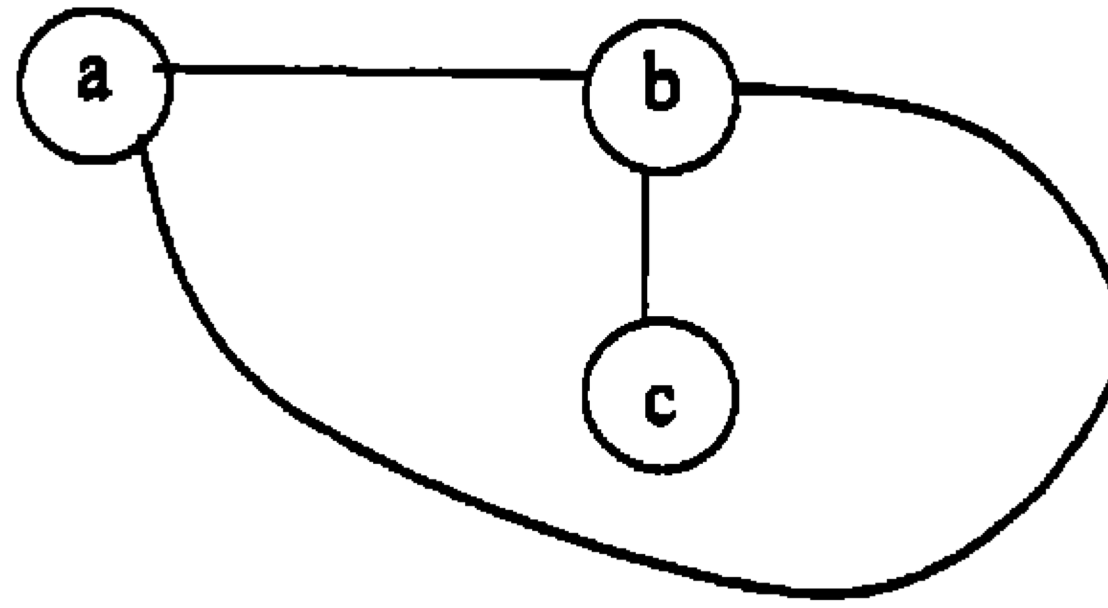
تخرج من الرأس. بناءاً على هذا التعريف تكون درجة الرأس a هي 3 بينمـــا درجـة الرأس c واحد. بالنسبة للرأس b درجته 2 والرأس d درجته 4 . قد يستغرب الطـالب من ذلك لكن الدرجة هي عدد المخارج وليس عدد الطرق المتصلة بالرأس. لاحـظ أن مجموع درجات جميع الرؤوس هو عشرة أي ضعف عدد الطرق. هذا قانون عام وليس خاص، أي إن مجموع درجات الرؤوس هو دائماً عدد زوجي وبالضبط ضعف عـــدد الأضلع. لقد لاحظنا بأن الرؤوس التي درجتها فردية كان عددهـــا اثـــين (a و c). يوجد قانون آخر في نظرية البيان ينص على أن عدد المدن التي درجتها فردية هو دائمـاً عدد زوجي. هذا الكلام يتفق مع القانون السابق حيث أن مجموع درجات المـدن ذات الدرجة الفردية سيعطي عدد زوجي بما أن عدد هذه المدن زوجي. لو كان عدد هـــذه المدن فردي لأصبح مجموع درجاتها فردي ولكان مجموع درجاتها مع مجموع درجـات المدن ذات الدرجة الزوجية (الذي سيكون دائماً عدداً زوجياً) عدداً فردياً. هذا الوضع الذي نصل إليه في حال الفرض السابق يناقض القانون الأول. في الواقع أي بيان يحقـق القانون الأول والثاني يمكن رسمه، وأي بيان لا يحقق أحد القانونين لا يمكـــن رسمـــه. طبعاً، يمكن رسم اكثر من بيان يحمل نفس المواصفات. مثلاً، لو طلبنا رسم بيان فيه 4 رؤوس بحيث درجة كل رأس منها تكون 3 . الاحتمال الأول قد يكون الرسم التالي:



والاحتمال الثاني قد يكون الرسم التالي:

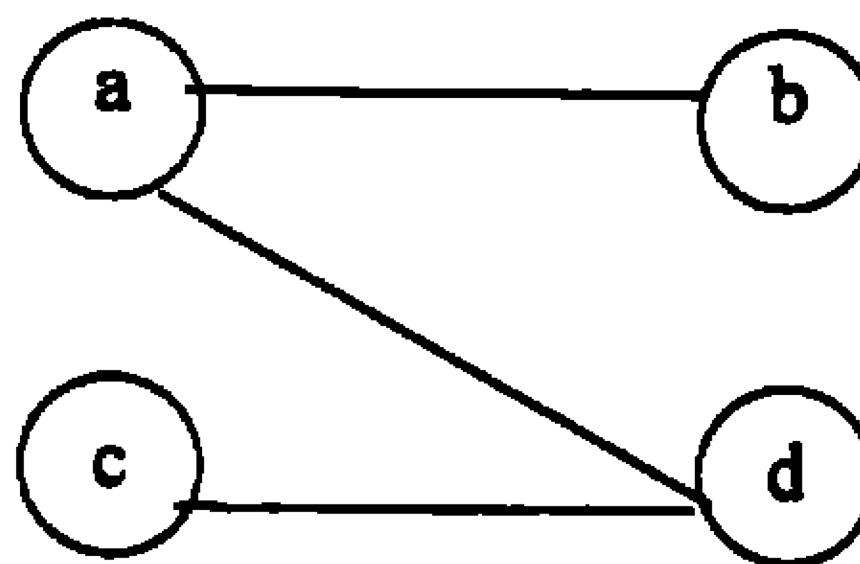


لاحظ أن الشكل الثاني يحتوي، على طرق التفافية. كما أنه يوجد في الشـــكل الثـــاني طريقان مباشران من الرأس b إلى الرأس c. هذان الطريقان يدعيان طريقان متوازيـــان. لقد كان شكل الاحتمال الأول يخلو من هذين النوعين من الأضلـــع، أي الالتفافيـــة والمتوازية. تدعى مثل هذه الأشكال بيانات بسيطة. إذاً، الشكل الأول بسيط بينمـــا الشكل الثاني غير بسيط. البيان التالي:

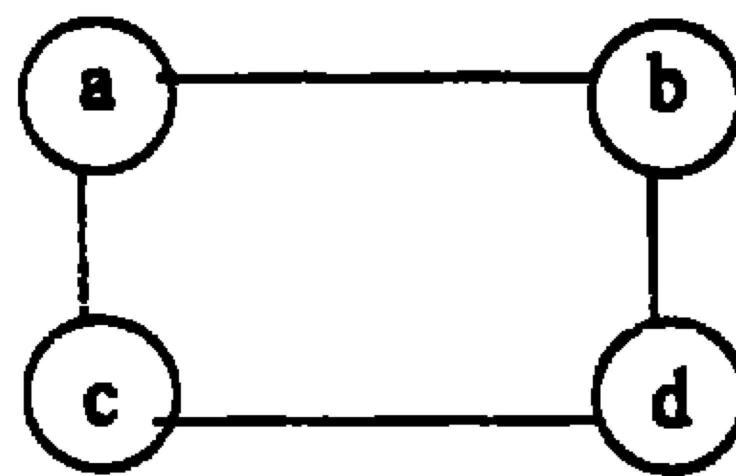


غير بسيط لأنه يوجد طريقان متوازيان بين الرأس a و b.

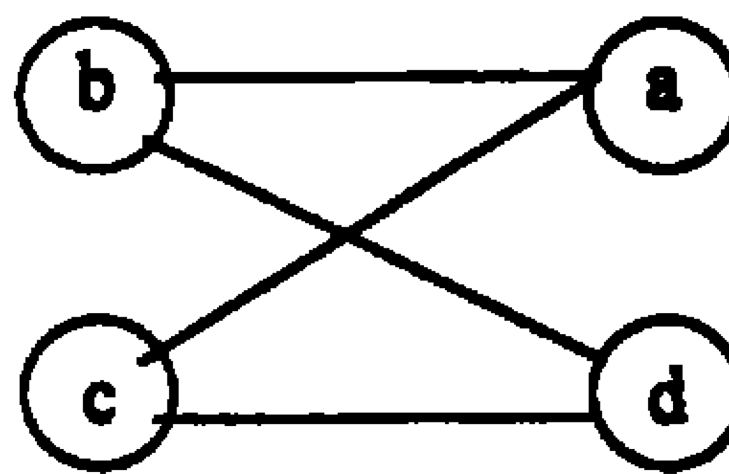
يوجد تصنيف آخر للبيانات حسب قابليتها للتقسيم إلى قسمين. البيان يكـــون متصلاً بمعنى أن المرء يستطيع الانطلاق من أي رأس يريد والوصول إلى أي رأس آخـــر من خلال استخدام أضلع البيان المختلفة بشكل متصل. نحن نقصد بقابلية التقســيم إلى قسمين أن تكون الأضلع داخل البيان تربط بين مجموعة جزئية مـــن الـــرؤوس مـــع المجموعة المتممة من الرؤوس. مثلاً، في البيان التالي:



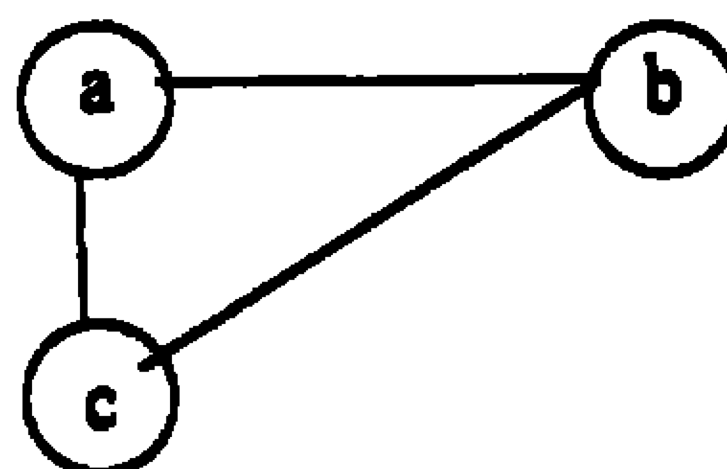
الأضلع تربط بين جهة اليمين (d و b) وجهة اليسار (c و a). لذا يمكن اعتبار البيان قابل للتقسيم إلى قسمين. سنشبه المسألة بنشوب حرب داخل قارة ما تحتوي على عدة دول. إذا كانت الحرب قد فرزت الدول إلى حلفين فإن شبكة خطوط القتال تكون بياناً قابل للتقسيم إلى قسمين. في البيان السابق يكون الضلع بين a و b هو خط قتال بين الدولة a والدولة b. الآن الدولة d تقاتل أيضاً الدولة a، و لذا من مصلحتها أن تدخل حلفاً مع الدولة b. كذلك من مصلحة c بسبب محاربتها الدولة d أن تقف إلى جانب الدولة a لأن عدو عدوي صديقي. أي يوجد داخل البيان حلفان أحدهما حلف اليمين والآخر حلف اليسار. طبعاً، ليس بالضرورة أن تقاتل كل دولة في الحلف جميع الدول في الحلف الآخر. البيان التالي:



هو أيضاً بيان قابل للتقسيم إلى قسمين. يمكن التفكير بأن a و d يقاتلان b و c. لذا ينشأ هنا حلف اليمين a و d مقابل حلف اليسار b و c. في هذه الحالة يعاد رسم البيان لإظهار هذا التقسيم (التحالف) كالتالي:

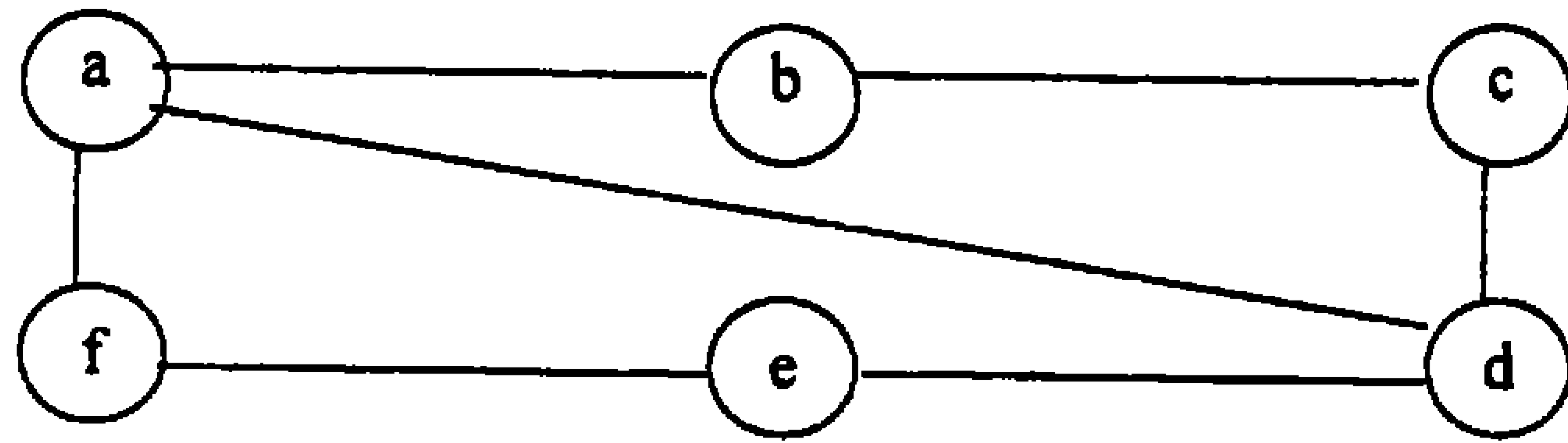


أبسط البيانات غير القابلة للتقسيم إلى قسمين هي المثلث، أي البيان التالي:



هنا كل دولة من الدول الثلاث تقاتل الأخرى، ولذا لا يوجد حلفان وإنما قد نتكلم عن ثلاثة أحلاف.

لجعل الوصف السابق أكثر دقة من ناحية رياضية سنلجأ إلى الطريقة التالية في التفكير. إذا نظرنا إلى البيان التالي:



لمعرفة قابليته للتقسيم إلى قسمين (حلفين) ومعرفة كل من الحلفين نعمد إلى تكوين جدول للأضلاع. في هذا الجدول سنضع أحد طرفي الضلع من الرؤوس في عامود والطرف الآخر في العمود المقابل. يمكن اختيار الضلع الأول بشكل عشوائي ثم يجب توخي إعطاء أدوار لبقية الأضلاع. كذلك يجب مراعاة أن لا نضع الرأس الجديد في عمود يحتوي على رأس قديم معادٍ له. إذا أمكن فرز جميع الأضلع في الجدول دون مشاكل يكون البيان قابل للتقسيم. أما إذا تعذر الفرز دون حدوث المحظور السابق فإن البيان يكون غير قابل للتقسيم. لنبدأ العمل في البيان السابق بوضع الضلع بين a و b في السطر الأول من الجدول التالي:

L	R
a	b

يرمز حرف L إلى حلف اليسار وحرف R إلى حلف اليمين. لقد ظهر حسب المسير من اليسار إلى اليمين حرف a قبل حرف b في الجدول مما يعني أنه يجب فرز جميع الأضلع المتصلة بالرأس a ثم الانتقال إلى فرز جميع الأضلع المتصلة بالرأس b. كما أن

فرز جميع الأضلع المتصلة بحرف ما سيتم حسب الأبجدية للرؤوس. أي سنفرز الضلع بين a و d ثم الضلع بين a و f فيصبح الجدول كالتالي:

L	R
a	b
a	d
a	f

ثم ننتقل إلى أضلع b فينشأ الجدول

L	R
a	b
a	d
a	f
c	b

لاحظ أننا أبقينا b في حلف اليمين وبالتالي انضمت c تلقائياً إلى حلف اليسار. لو سرنا في الجدول من أعلى إلى اسفل لعرفنا أن ترتيب ظهور الأحرف المتبقية كان d ثم f ثم c. لذا سنكمل فرز ما تبقى من أضلع بهذا الترتيب. سينتج الآن الجدول التالي:

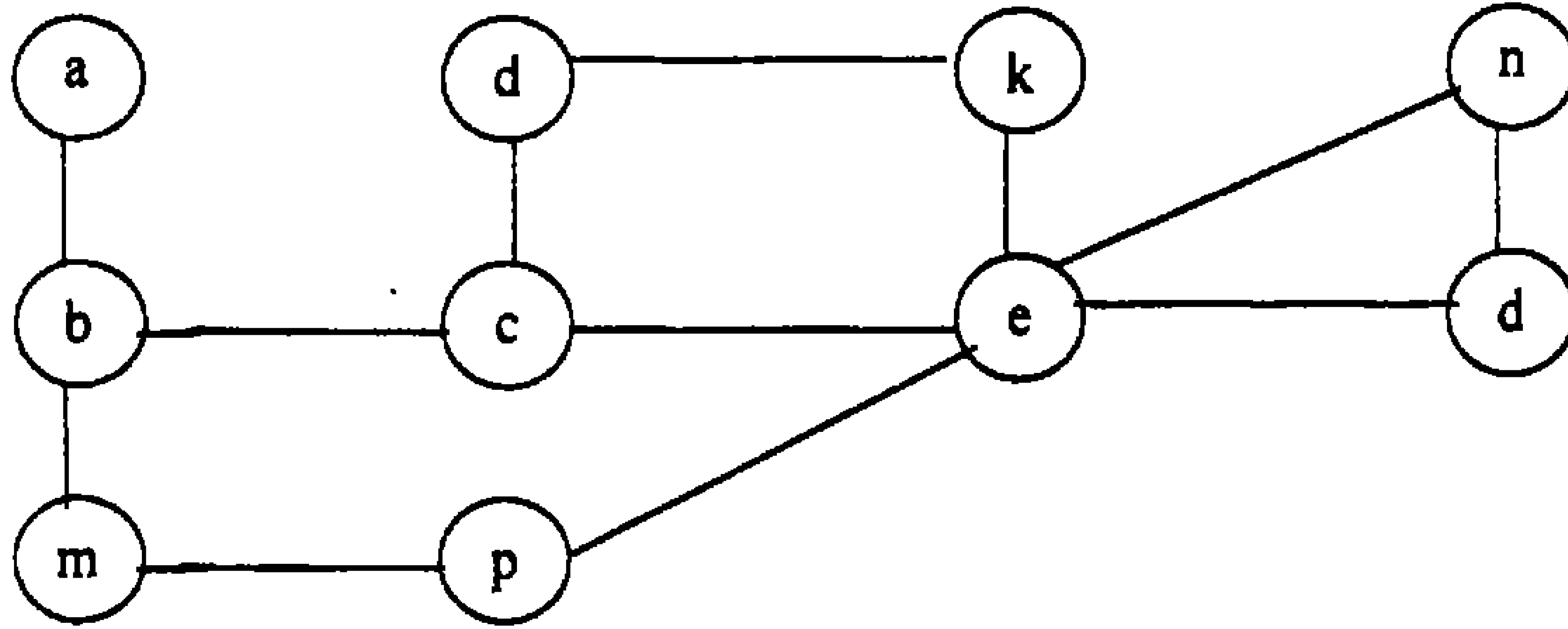
L	R
a	b
a	d
a	f
c	b
c	d
e	d
e	f

بسبب انتهاء الأضلع بعد فرز أضلع f نقف ونرى أن القسمان (الحلفان) هما

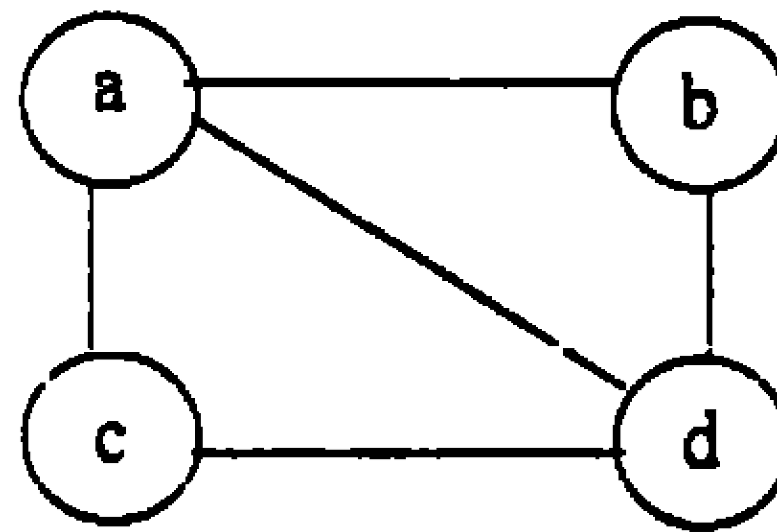
L = { a , c , e}

R = { b , d , f}

يمكن للطالب أن يتأكد من أن الأمور لن تسير بهذه السهولة في الشكل التالي حيث أنه غير قابل للتقسيم إلى قسمين:



توجد داخل البيان التالي:



عدة مسارات تؤدي من a إلى b حيث يوجد خط مباشر بين a و b وخط عبر c وكذلك خط عبر d. جميع هذه المسارات تعتبر مسارات بسيطة بمعنى أنها تنطلق من a وتذهب إلى b دون المرور على أية مدينة في البيان أثناء المسير أكثر من مرة واحدة. كمثال على مسار غير بسيط يمكن اعتبار المسار المنطلق من a إلى b ثم d ثم a ثم c ثم d وأخيراً b مساراً غير بسيطاً بسبب المرور على a مرتين أثناء التجوال (كذلك d). يوجد مفهوم سنعرف أهميته البالغة لاحقاً وهو مفهوم اللفة. اللفة عبارة عن مسار مغلق بمعنى أن نقطة الانطلاق والانتهاء تكون متطابقة. توجد داخل البيان السابق عدة لفات من a إلى a منها:

a → b → d → a

a → c → d → b → a

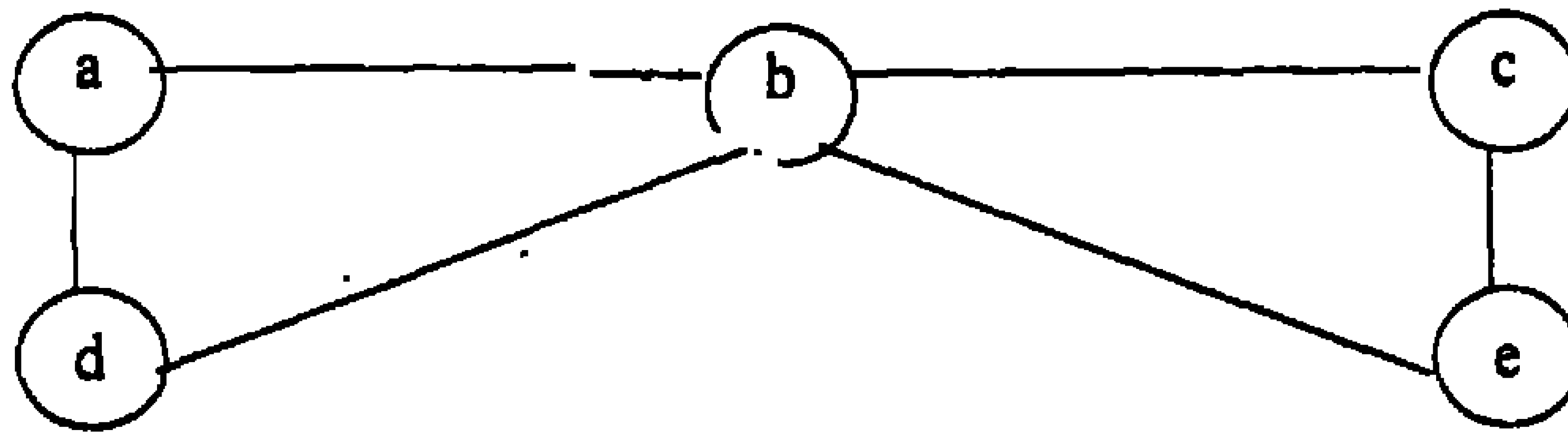
a → c → d → a → b → d → a

اللفة الثالثة هي لغة غير بسيطة بسبب المرور على a أثناء الرحلة بينما أول لفتان تعتبران لفتان بسيطتان. سندرس في الفصل القادم نوع من أنواع اللفات (في العادة غير بسيطة) بينما سندرس في الفصل الذي يليه نوعاً آخراً (دائماً تكون اللفة فيه بسيطة).

الفصل الثاني

لفات أويلر (لفات السائح)

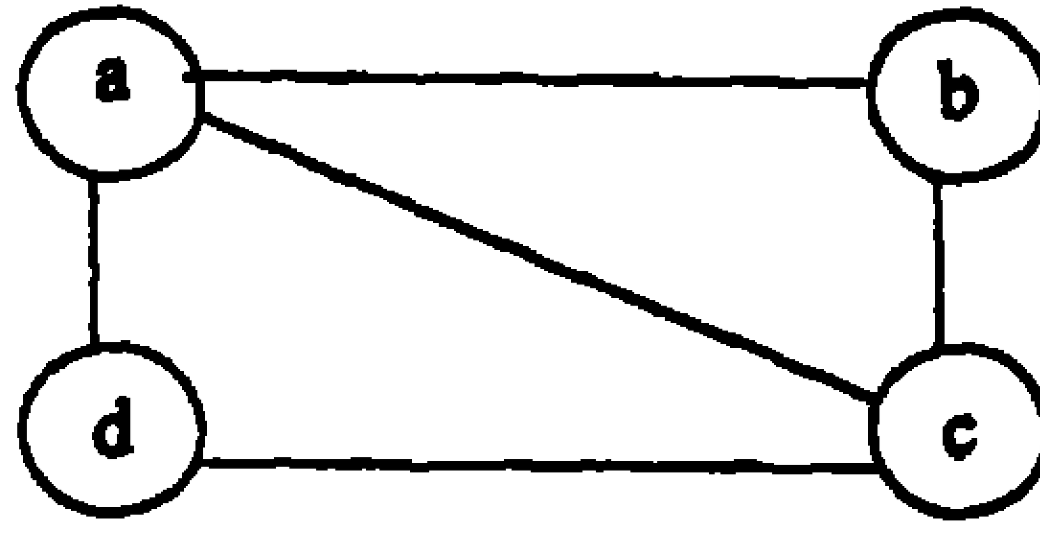
توجد داخل البيان التالي



لفة مميزة وهي:

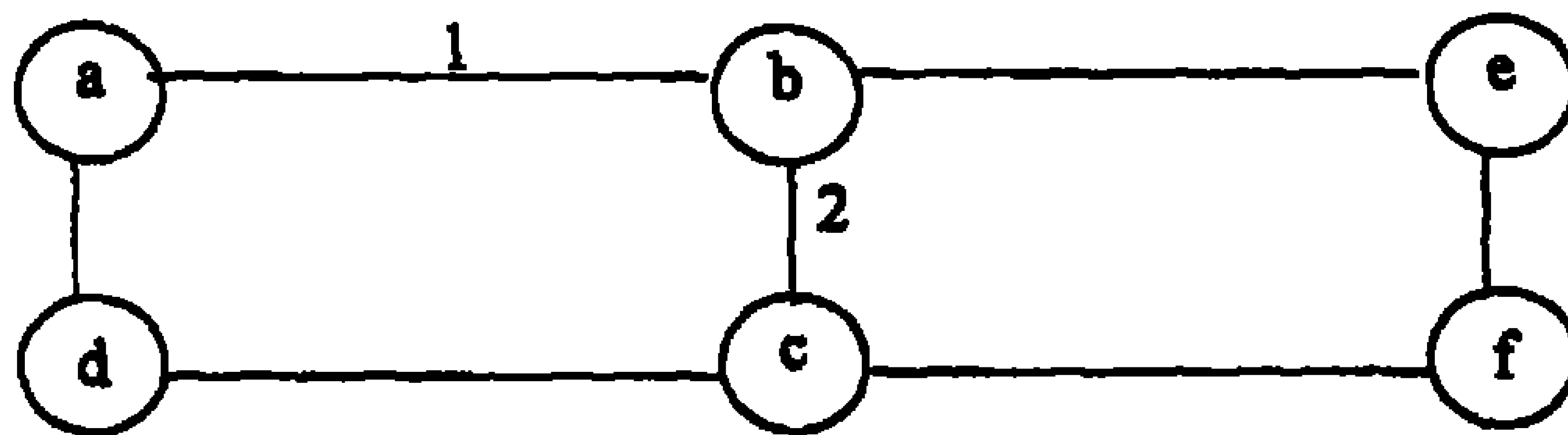
$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow a$$

سبب تميز هذه اللفة أنها تمر على جميع الطرق أثناء المسير وفي نفس الوقت لا تستخدم أي طريق سوى مرة واحدة فقط. يدعى هذا النوع من اللفات لفات أويلر (نسبة إلى العالم السويسري أويلر) وأحياناً يطلق عليها اسم لفات السائح. سبب هذه التسمية هو أن السائح كما هو معروف يرغب بزيارة المدن المختلفة باستخدام طرق مختلفة. فعادةً ما يسافر السائح من مدينة إلى أخرى باستخدام طريق ثم يقفل راجعاً باستخدام طريق يختلف عن الطريق الأول. لذا تعتبر زيارة كل الطرق والمرور في كل طريق مرة واحدة نوعاً من اللفات المميزة التي يفضلها السياح. لقد كان أويلر أول من فكرة في إمكانية عمل لفة سائح داخل البيان. توجد بيانات يتعذر فيها عمل لفة على كل الطرق دون استخدام أحد الطرق أكثر من مرة. فمثلاً، داخل البيان التالي:

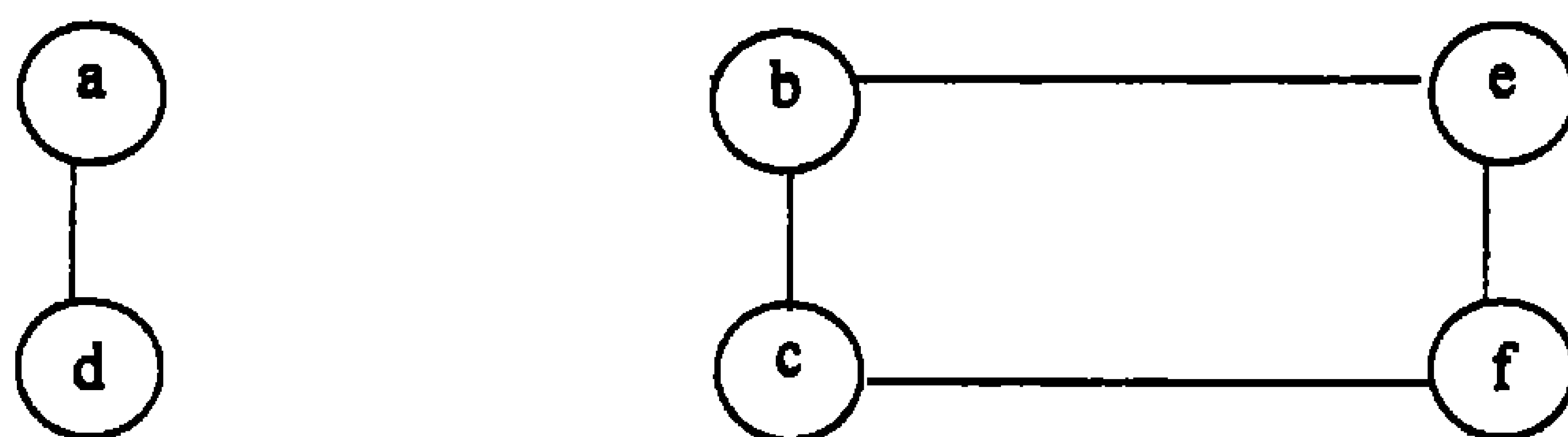


أي لفة تبدأ من أي رأس وتعود إليه تستخدم على الأقل ستة طرق. بما أنه يوجد فقط خمسة طرق، إذاً لا وجود للفة أويلر في هذا البيان. لقد توصل أويلر إلى نظرية حول وجود هذه اللفات وهي تنص على ما يلي: إذا كانت جميع الرؤوس داخل البيان ذات درجات زوجية فإنه توجد على الأقل لفة أويلر واحدة، وبالعكس وجود لفة أويلر واحدة داخل بيان يعني بالضرورة كون جميع الرؤوس من نوع زوجي الدرجة.

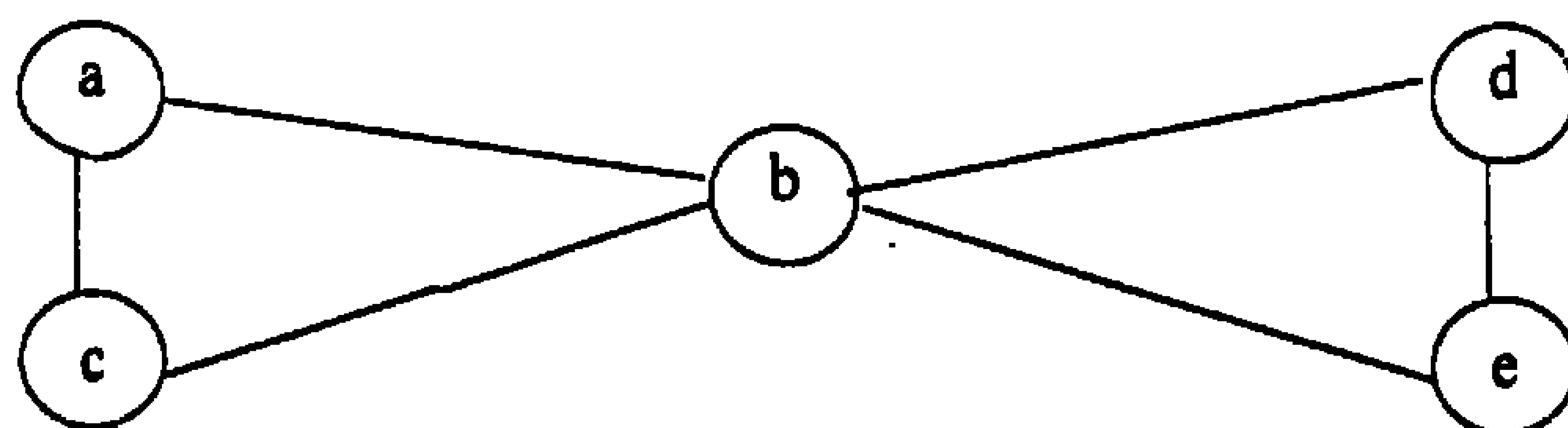
توجد طريقة قابلة للبرمجة لإيجاد لفة أويلر داخل بيان يحتوي على هذه اللفة. تدعى هذه الطريقة بخوارزمية فليرى. فكرة الخوارزمية قائمة على إعطاء الأضلع داخل البيان أرقام متعاقبة تدل على ترتيب استخدام هذه الأضلع كطرق. الانطلاق يكون من الرأس a وعند الوصول إلى مفترق طرق نسلك طريقاً يؤدي إلى الحرف الذي له الأولوية حسب الأبجدية. يجب هنا مراعاة أن لا يكون الطريق الذي يأخذ الأولوية بمثابة جسر، بمعنى أن استخدامه سيؤدي إلى عدم إمكانية متابعة المسير دون استخدام أي طريق مجدداً. لنكون أكثر دقة سنعتبر أن الطريق الذي تم ترقيمه أصبح في حكم الملغي. الآن الضلع سيكون داخل بيان تم ترقيم بعض أضلاعه جسراً إذا كانت عملية إلغائه ستؤدي إلى انفصال البيان إلى جزئين. مثلاً، في البيان التالي:



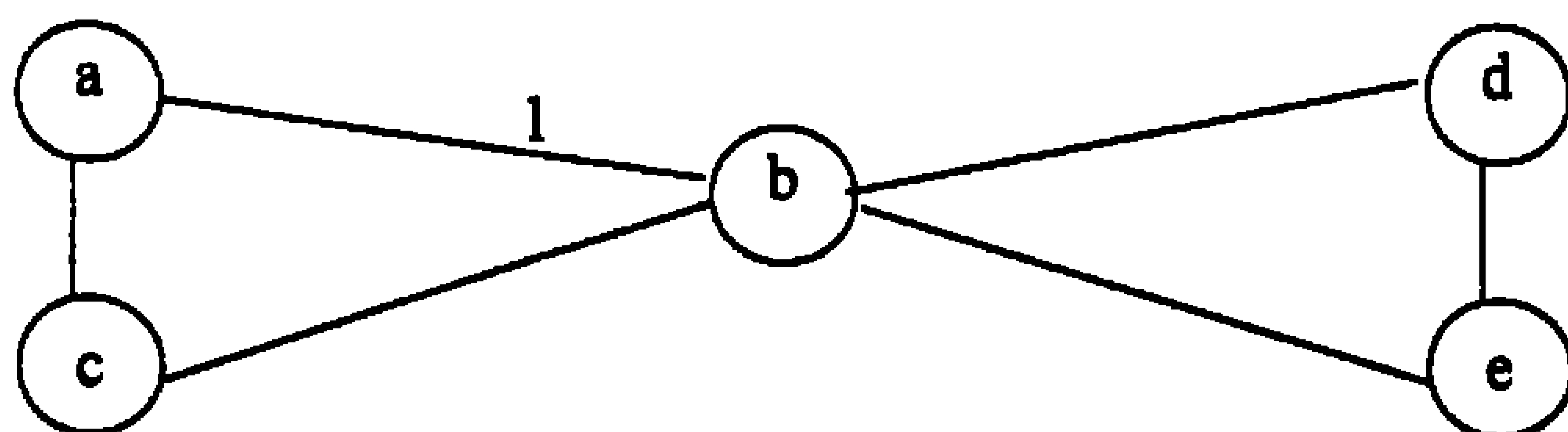
الضلع بين c و d يعتبر جسرا، إذ أن إلغائه يعني تشكل الوضع التالي الأضلع المتبقية:



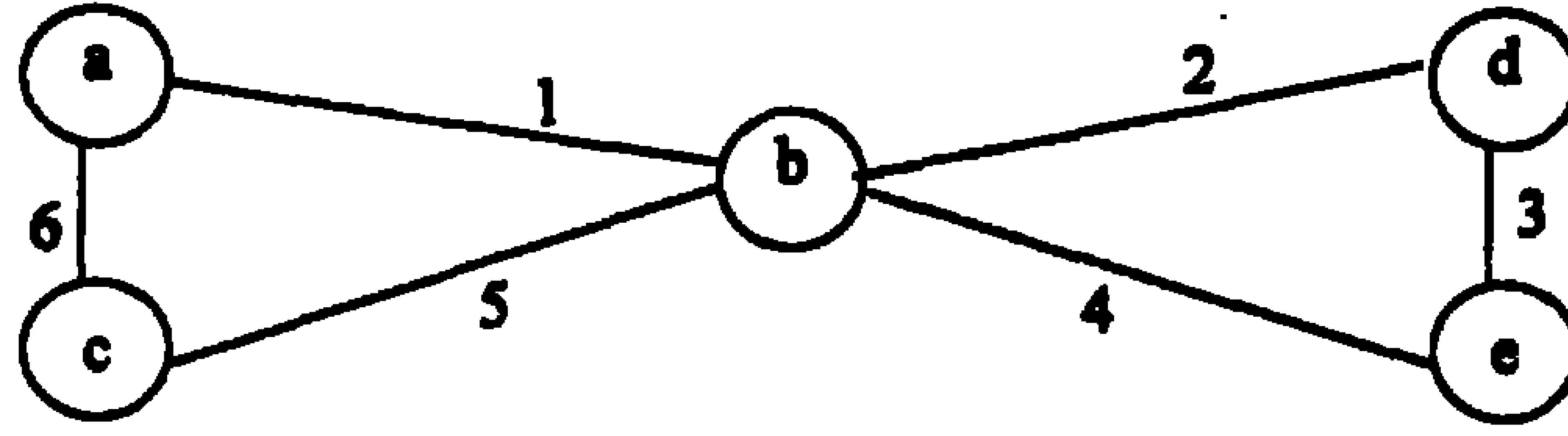
ما العمل في حال كون أحد الأضلاع جسرا أثناء تطبيق خوارزمية فليرى؟ الجواب بسيط، ما علينا سوى إلغاء الجسر من قائمة الأضلع التي سيقع على أحدها اختيارنا لكي نتابع المسير. مثلا، البيان التالي يحتوي على لفة أويلر:



سنختار أولا الضلع بين a و b أي يصبح الوضع كالتالي:



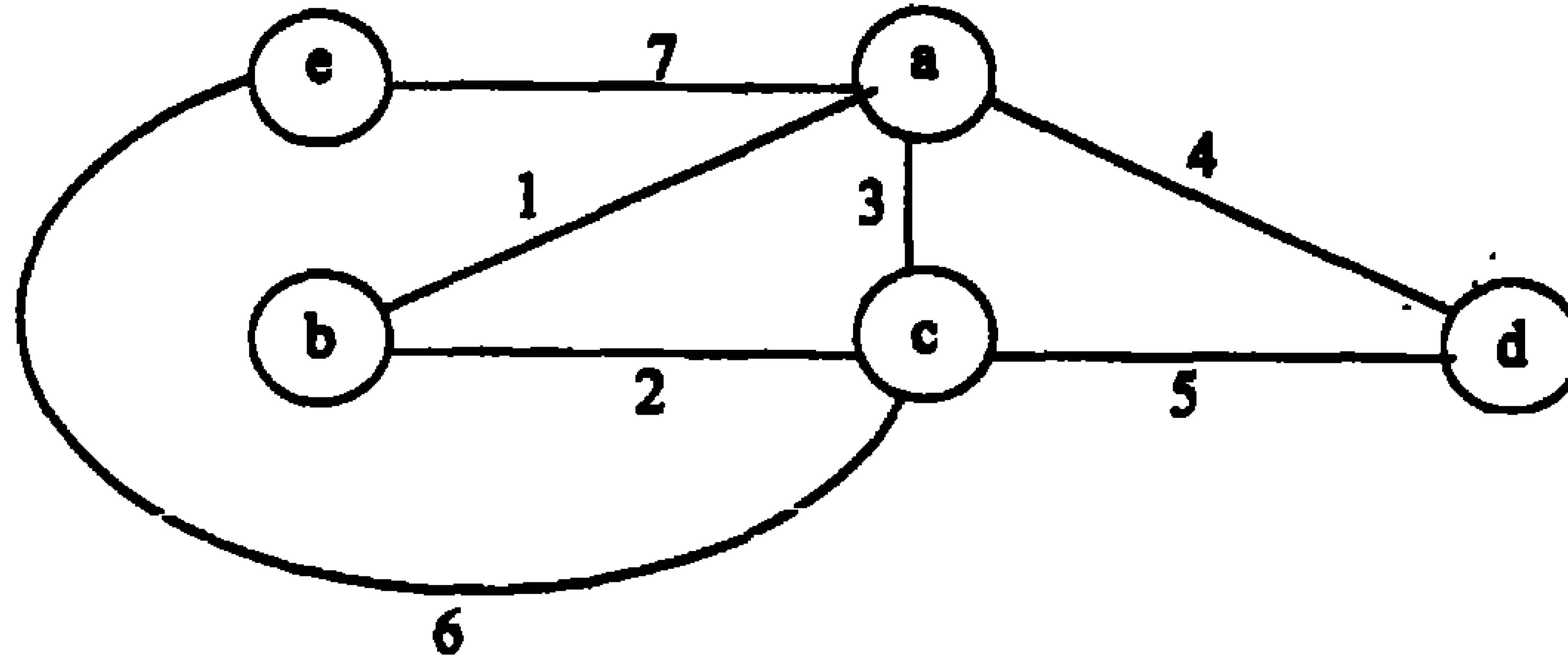
الضلع الثاني الذي سيستخدم سيكون من بين الأضلاع: بين b و c أو بين b و d أو بين b و e. الأولوية حسب الأبجدية للضلع بين b و c، لكن هذا الضلع جسر. لذا نختار من الضلعين المتبقين الضلع بين b و d حسب الأبجدية. ونتابع المسير دون مشاكل حتى النهاية فيصبح البيان كالتالي:

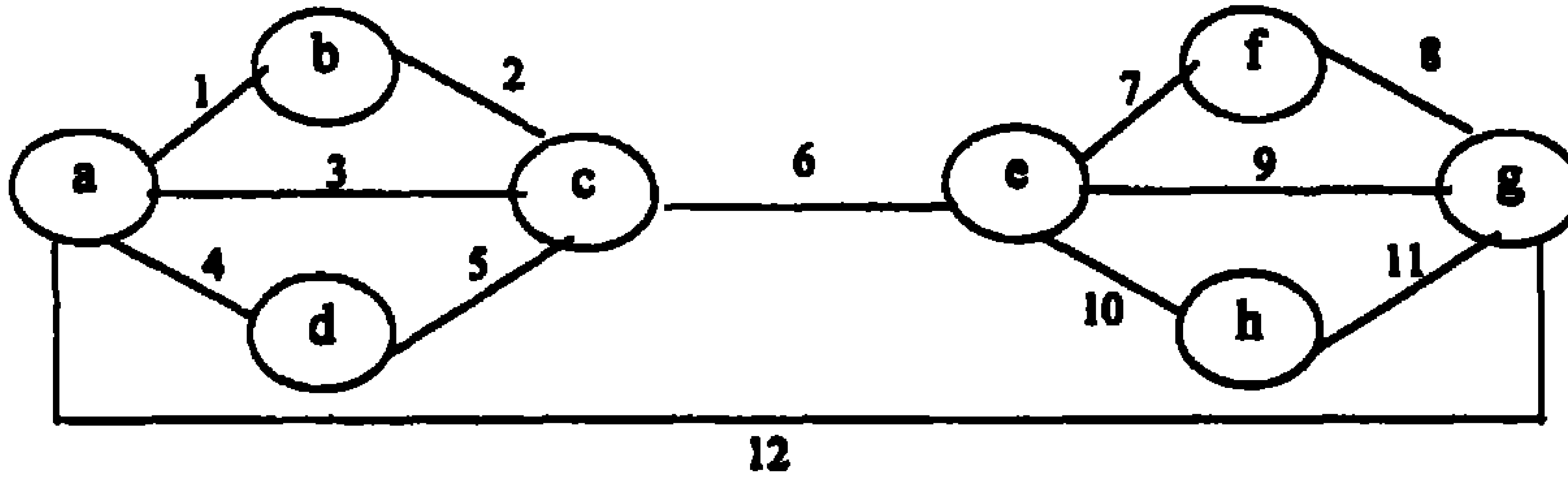


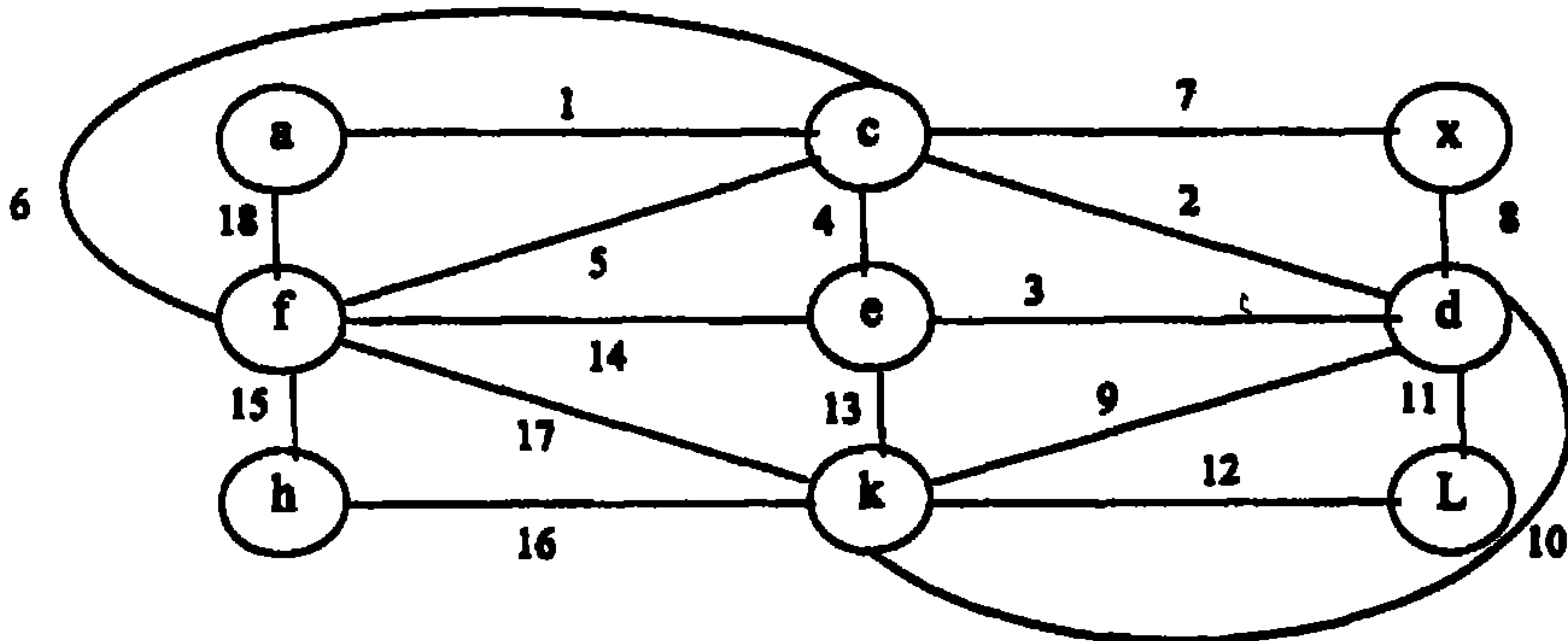
إذاً، لفة أويلر تكون على النحو التالي:

a → b → d → e → b → c → a

سنرسم الآن عدداً من البيانات التي يتضح من ترقيمها لفة أويلر داخلها:







الفصل الثالث

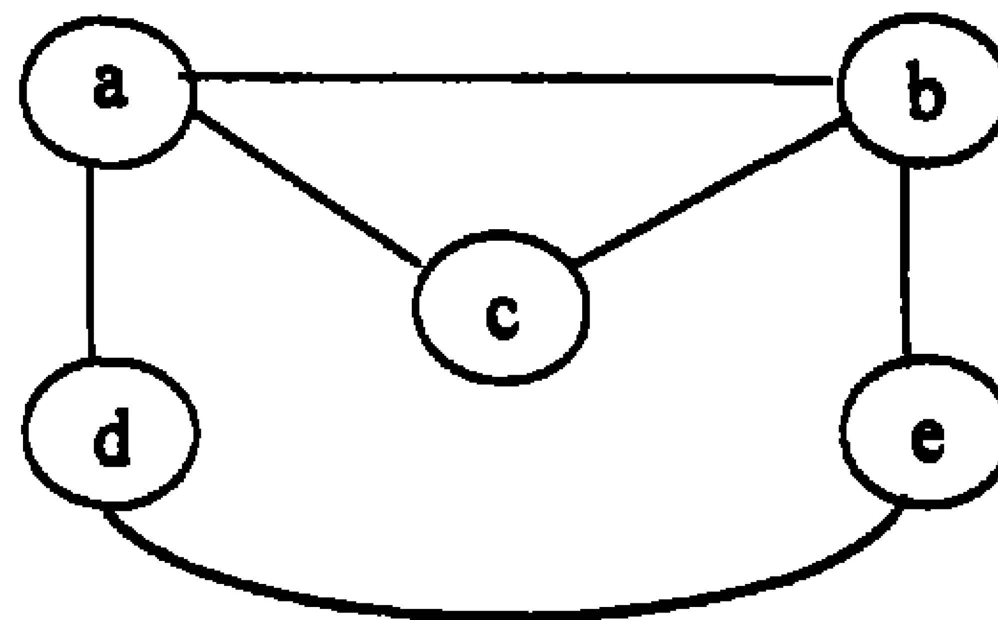
لفة هاميلتون (لفة البائع)

هذا النوع من اللفات بعكس لفات أويلر يهتم بالمدن فقط. أي لفة هاميلتون هي لفة تمر على جميع المدن (الرؤوس) داخل البيان بحيث لا تمر على أي مدينة أكثر من مرة واحدة فقط. الوضع هنا يشبه في الحياة العملية وضع بائع أتى من بلاد أخرى إلى بلد ما وأحب أن يتجول في البلد الجديد بهدف بيع بضاعته. إن البائع لا يهتم كالسائح بالمرور على جميع الطرق وإنما يحاول توفيرا للجهد والمال أن يمر على كل مدينة مرة واحدة فقط. لذا، يسمى هذا النوع من اللفات أحيانا بلفات البائع. للأسف، لا توجد هنا خوارزمية لتحديد اللفة أو حتى نظرية واضحة حول شروط وجودها. لكن، توجد بعض النظريات التي تعطي جوابا جزئيا حيث تعطي بعض الشروط التي تضمن وجود لفة. من هذه النظريات النظرية التالية:

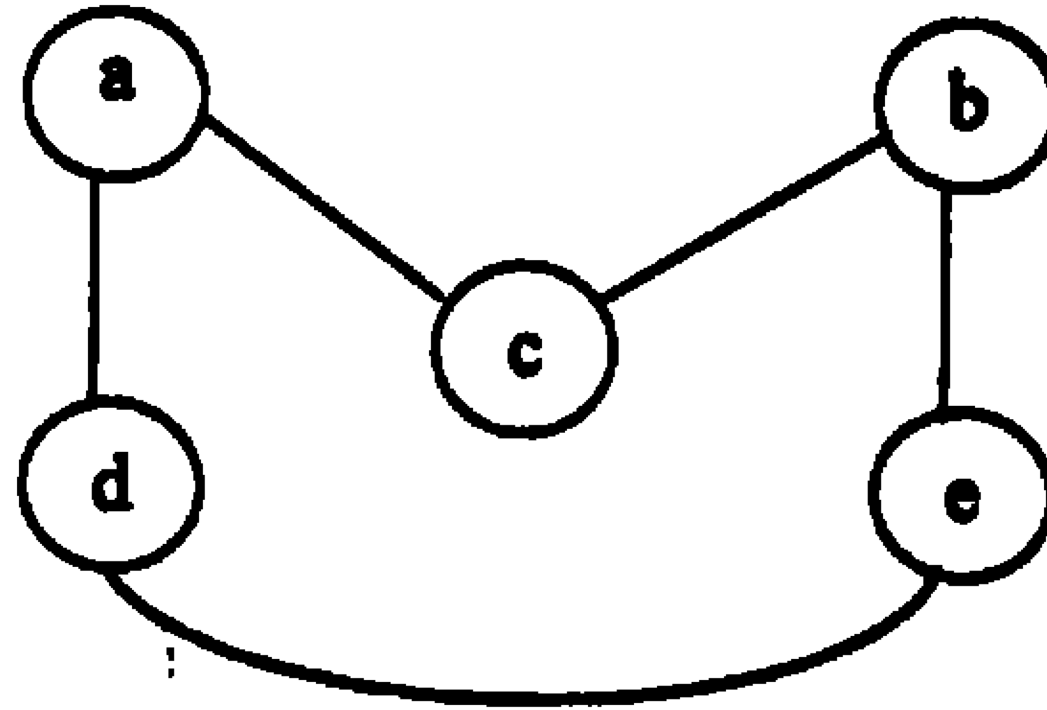
ليكن m هو عدد الأضلع داخل بيان بسيط. إذا كان عدد الرؤوس n يحقق

$$m \geq \frac{1}{2}\ (n^2 - 3n + 6)$$

فإنه توجد داخل البيان لفة هاميلتون. سنعتمد في تفكيرنا خلال هذا الفصل على مبدأ البحث بالتجربة والخطأ لإيجاد اللفة. أحيانا قد يتعذر تحديد اللفة ويمكن ببعض التعليل تفسير عدم إمكانية وجود مثل هذه اللفات داخل البيان. مثلا، في البيان التالي:



توجد لفة هاميلتون تنطلق من a ثم تذهب إلى c ثم تكمل إلى b فالرأس e فــــالرأس d وأخيراً تنتهي بالرأس a. يتم عادة التعبير عن لفة هاميلتون من خلال رسم تحديد للبيان يوضح الطرق المستخدمة أثناء المسير فقط. أي لفة هاميلتون السابقة يعبّر عنها البيان التالي:



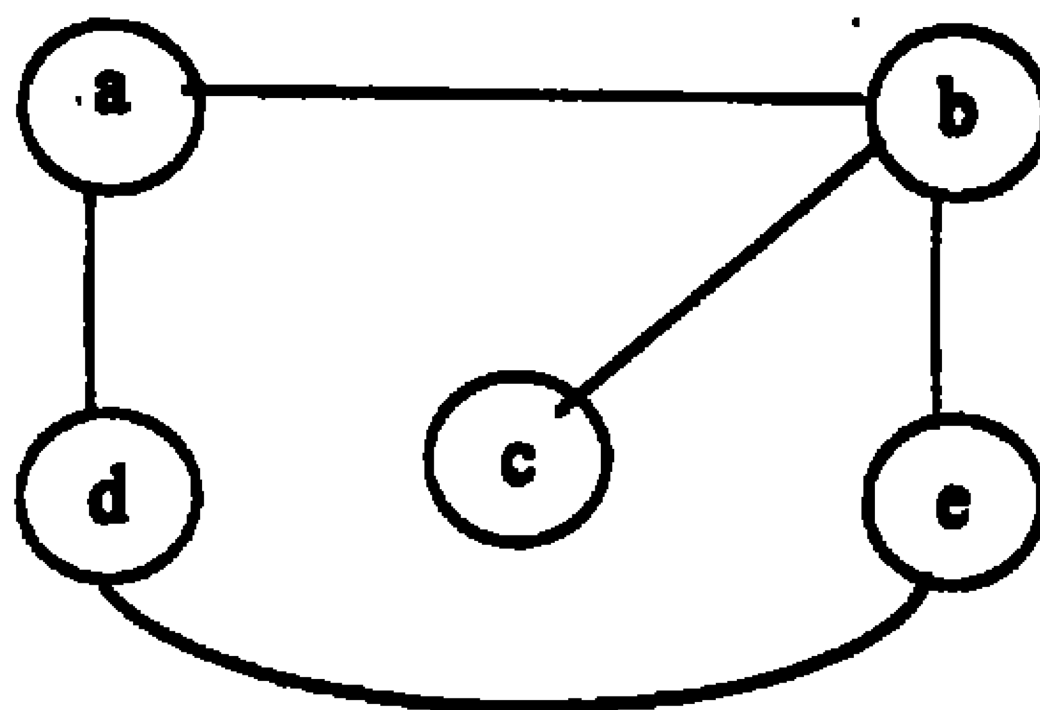
هذه البيان يدعى رسم لفة هاميلتون نلاحظ وجود خاصتين لهذا البيان:

أ- كل مدينة درجتها اثنين حيث أننا ندخل إلى المدينة من طريق ونخرج من طريــــق ولا نعود إليها لاحقاً.

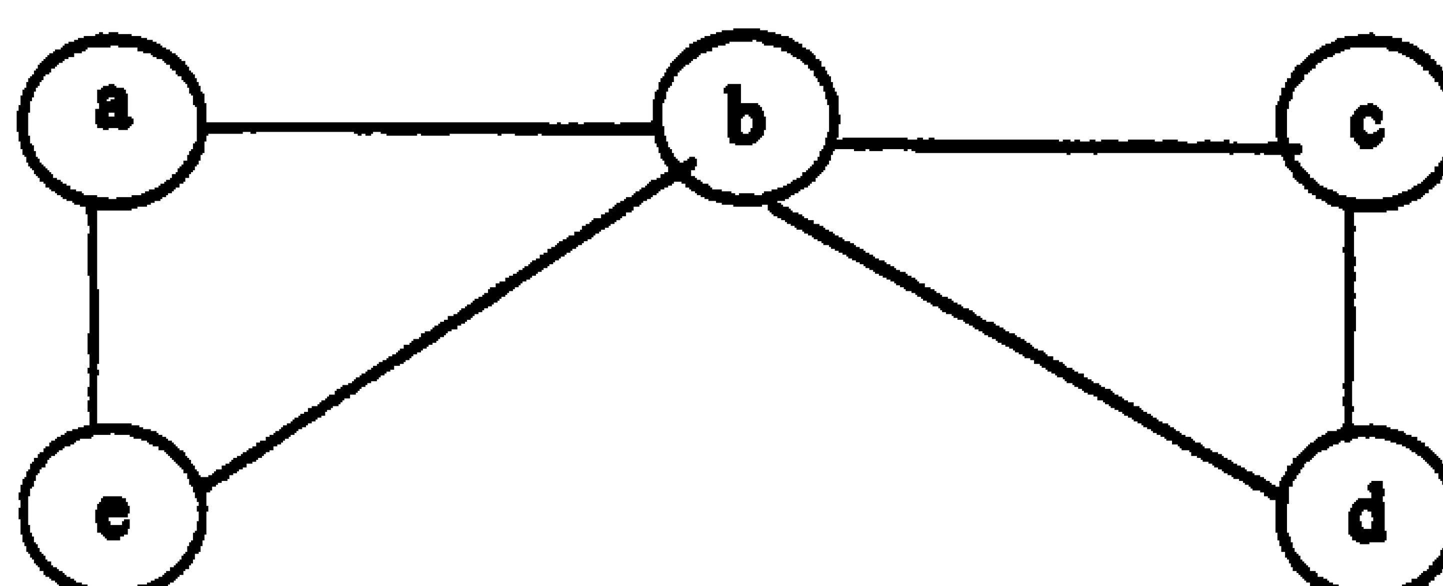
ب- عدد الأضلع يساوي عدد الرؤوس.

عند إيجاد لفة هاميلتون داخل أي بيان وتحديدها من خلال رسم اللفة، يجب أن يكــون لهذا الرسم الصفتان المذكورتان.

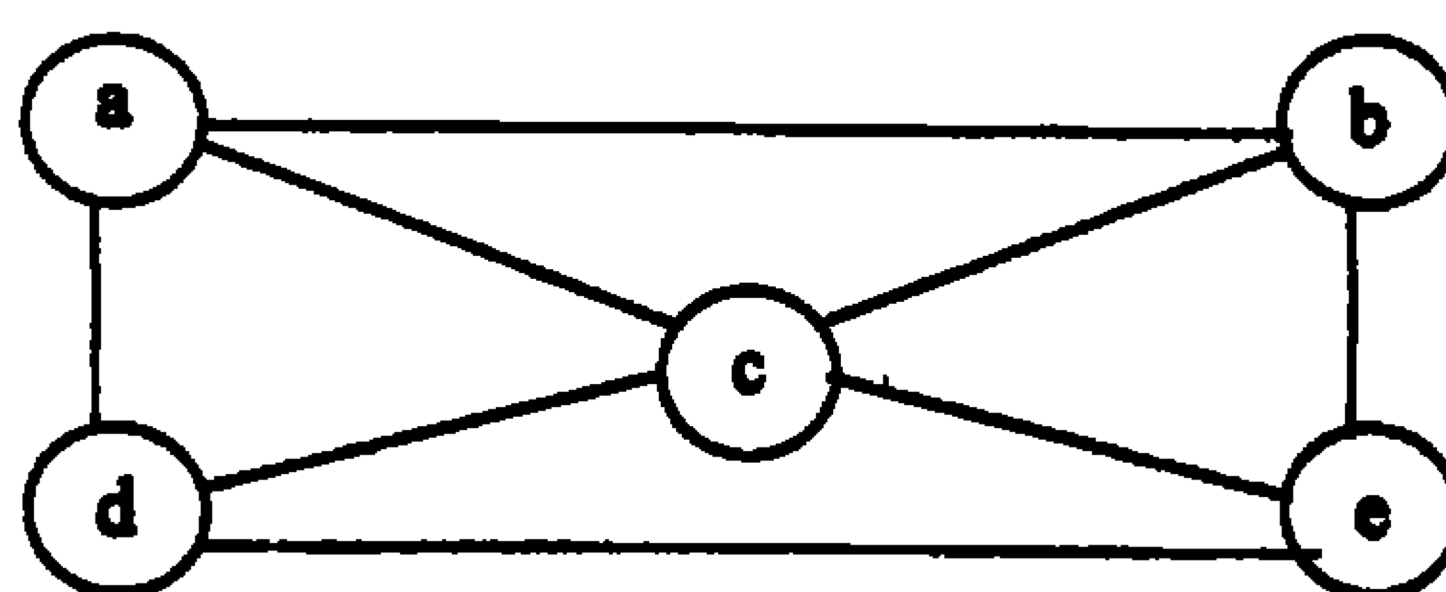
تذكر بأن الرسم هو بيان جزئي من البيان الأصلي، بمعنى أن الأضلع بين الــرؤوس في الرسم تكون من الأضلع الموجودة في البيان الأصلي. لذلك، البيان التالي:



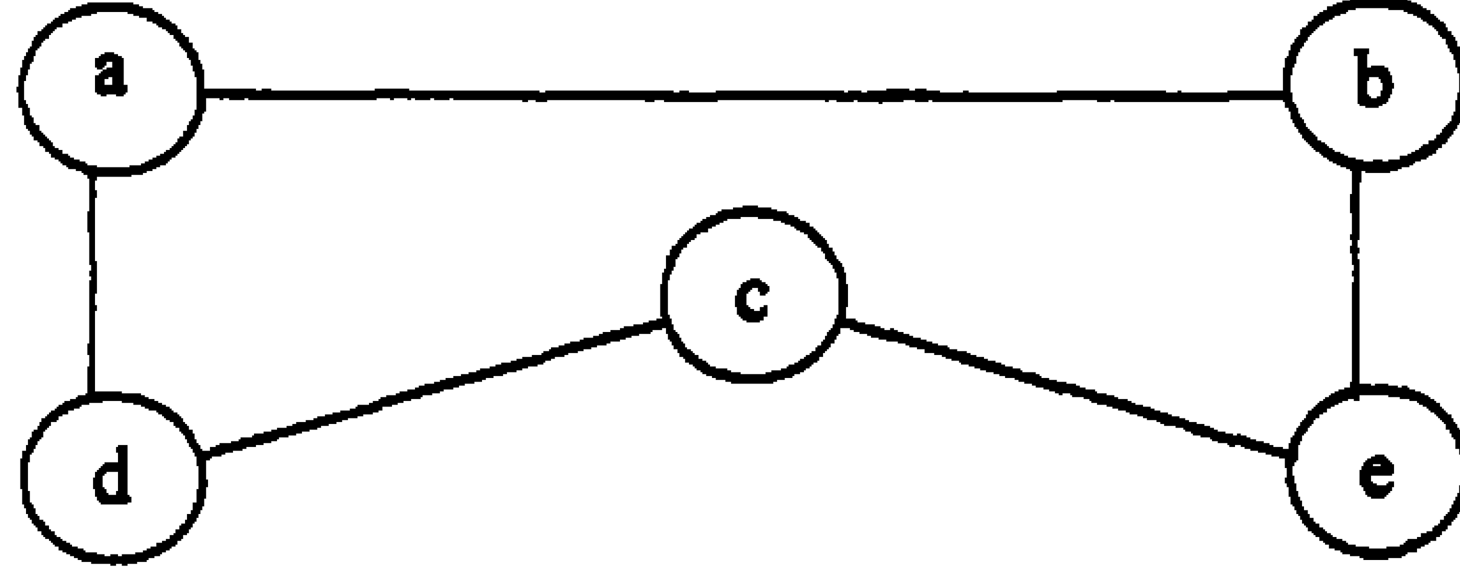
لا يحتوي على لفة هاميلتون. لأن درجة الرأس c بالأصل واحد وأي بيان جزئي من هذا البيان لا يمكن أن تزيد فيه درجة الرأس c لكي تصبح اثنين. إذاً، علينا دائماً مراعاة مسألة كون جميع درجات الرؤوس أكثر أو يساوي اثنين عند البحث عن لفة هاميلتون. في حال كون درجة الرأس بالضبط اثنين، فهذا يعني أن رسم لفة هاميلتون (إن وجد) لا بد أن يشمل الرأس بضلعيه كما هما دون حذف أياً منهما. مثلاً، إذا بحثنا عن لفة هاميلتون داخل البيان التالي:



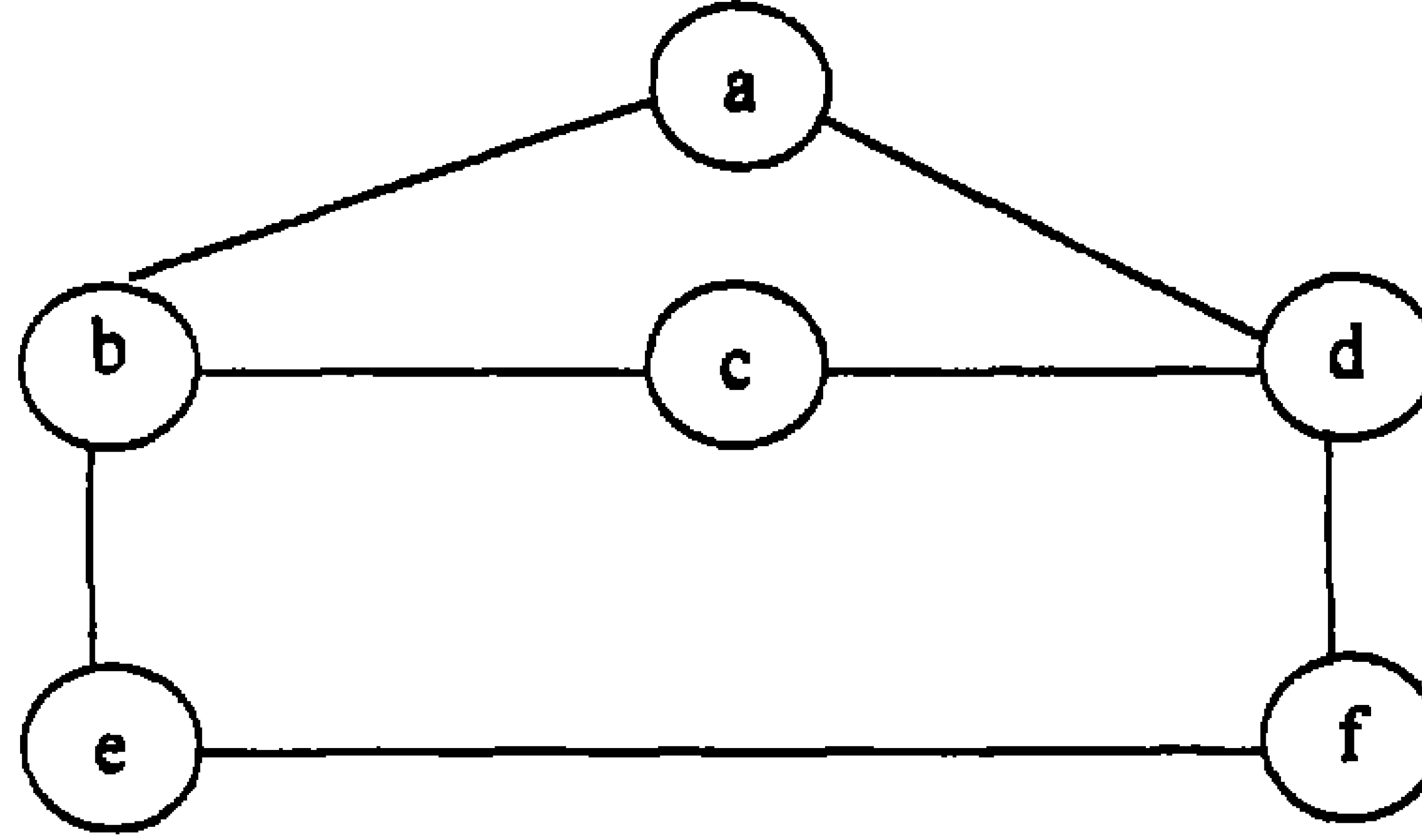
يجب أن نحافظ على الأضلع المتصلة بالرؤوس a و c و d و e . لكن، هذا معناه أن يحتفظ الرأس b بأربعة أضلع وبالتالي لا يمكن أن تصبح درجته اثنين من خلال حذف أضلع مناسبة. إذاً، البيان السابق لا يحتوي على لفة هاميلتون. بينما في البيان التالي:



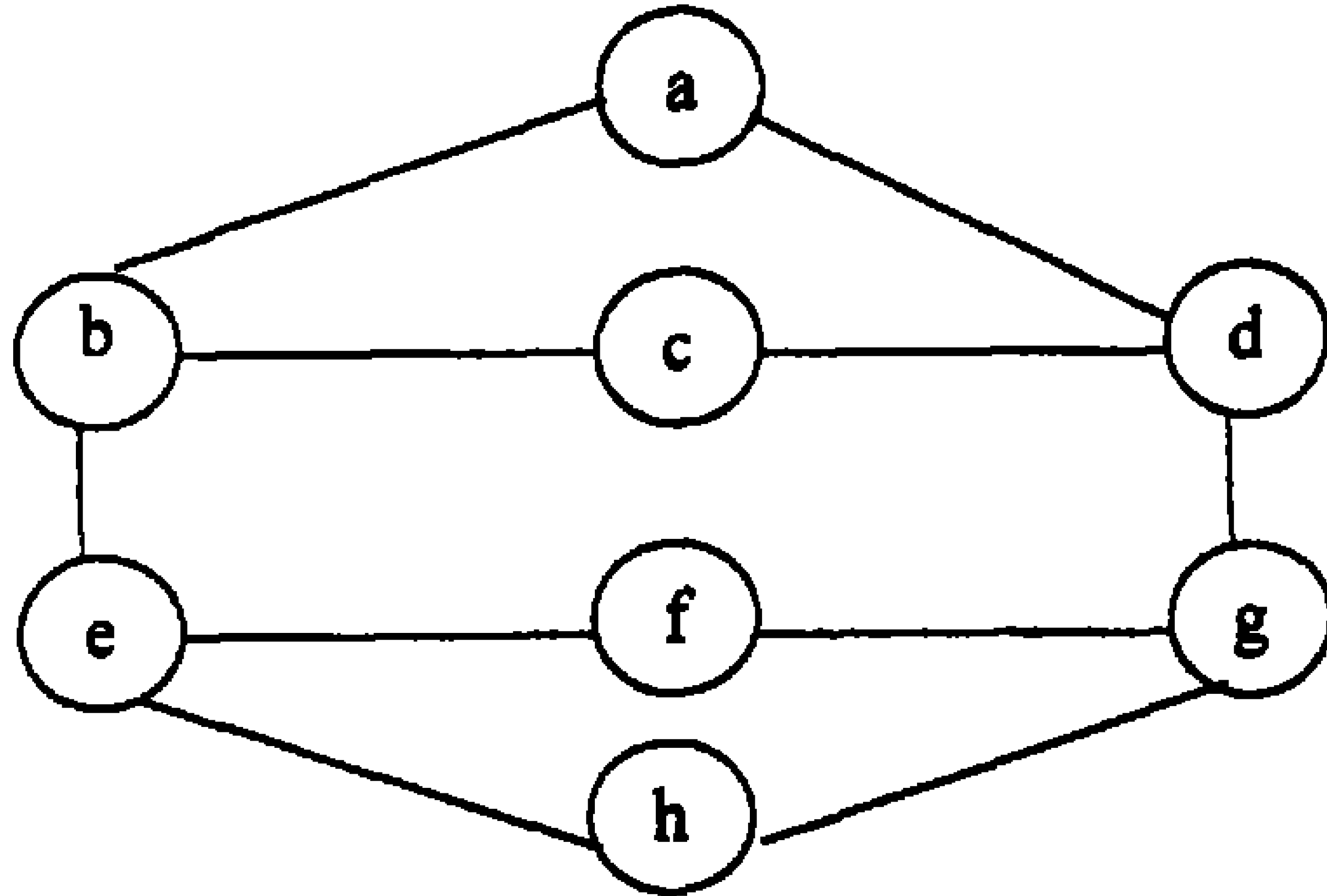
توجد أكثر من إمكانية لحذف ضلعين من أضلع الرأس c وضلع ثالث لكل من الرؤوس الأخرى بحيث يصبح عدد الأضلع والرؤوس خمسة. أحد هذه الإمكانيات يؤدي إلى رسم لفة هاميلتون التالية:



في الواقع يوجد داخل البيان أربع لفات هاميلتون. لننظر معا إلى البيان التالي:



يجب أن تحتفظ جميع الرؤوس باستثناء b و d على أضلعها. لكن، هذا يؤدي إلى إبقاء ثلاثة أضلع متصلة مع b و d مما يمنع تشكل لفة هاميلتون داخل البيان. أما في البيان



يمكن البدء بالرؤوس التي يجب حذف بعض الأضلع المتصلة بها. الرأس b يجب أن يحذف من أضلعه الثلاثة ضلعا لكي تصبح درجته اثنين. كذلك الأمر بالنسبة للرأس d. لا يمكن قول الكلام نفسه للرأسين e و g بسبب أنهما مرتبطان مع رؤوس

تكلمنا عن حذف ضلع منها. أي لو أننا تخيلنا بأننا حذفنا الضلع بين b و e لكنّا قد قمنا بجعل درجة الرأس b تصبح اثنين وفي نفس الوقت درجة الرأس e تصبح اثنين. وبهذا نكون قد حققنا هدفين في آن واحد. لذا، لا يجب أثناء التفكير في الحذف أن ننظر إلى كل رأس بمفرده بل حسب ارتباطه مع بقية الرؤوس. عادةً نبدأ بالرأس ذي اكبر عدد من الأضلع المتصلة، ثم ننظر إلى الرؤوس التي ترتبط معه. فإذا كان هنالك احتمال بأن نجعل درجة كل رأس منها اثنين من خلال الحذف الضروري لجعل درجة الرأس الكبير اثنين، لا نتكلم عن حذف أي ضلع منها. أما إذا كانت الأضلع المحذوفة من الرأس الكبير لا تحقق الهدف المنشود للرؤوس المتصلة في نفس الوقت، فإننا نفكر ماذا يجب حذفه من الرؤوس المتصلة كما فعلنا مع الرأس الكبير. تكون هنالك رؤوس مستقلة عن الرأس الكبير بحاجة إلى حذف أضلع. يتم اعتبار هذه الرؤوس بشكل منفصل كما فعلنا مع الرأس الكبير. ففي المثال السابق b و d مستقلان. لذلك حسبنا أنه يجب حذف ضلعين من أضلع البيان على وجه أكيد في محاولة الحصول على لفة هاميلتون. هذا الحذف سيبقي ثمانية أضلع من أصل عشرة. عدد الرؤوس هو أيضاً ثمانية. قد يكون هذا مؤشراً على وجود لفة لأنه بمثابة تحقق الشرط الثاني من شروط اللفة (الخاصية ب). لكن، عند تدقيق النظر يتملك المرء الشعور بعدم وجود اللفة. اذاً، الحسابات السابقة كانت سطحية وبحاجة إلى دراسة أعمق. نحن نعرف أنه يجب بالضرورة حذف ضلع من b وضلع من d. توجد تسعة احتمالات لفعل ذلك.

الاحتمالات هي:

١- حذف الضلع بين a و b والضلع بين a و d. هذا سيؤدي إلى أن تصبح درجة a صفر، وهو أمر مرفوض.

٢- حذف الضلع بين a و b والضلع بين c و d. هذا يجعل درجة a تصبح واحد، وهو أمر مرفوض.

٣- حذف الضلع بين a و b والضلع بين d و g. هذا حل مرفوض لنفس السبب كما في الاحتمال الثاني.

٤- حذف الضلع بين b و c والضلع بين a و d. هذا الاحتمال لا يؤدي إلى لفة كما ذكر سابقا.

٥- حذف الضلع بين b و c والضلع بين c و d. لن يفيدنا هذا الاحتمال شيئا.

٦- حذف الضلع بين b و c والضلع بين d و g . في هذه الحالة تصبح درجة c واحد مما يمنع تحديد لفة هاميلتون.

٧- حذف الضلع بين b و e والضلع بين a و d . لا فائدة تجنى من هذه الفكرة.

٨- حذف الضلع بين b و e والضلع بين c و d. هذا الاحتمال ليس بأحسن من سابقيه.

٩- حذف الضلع بين b و e والضلع بين d و g. هذا الاحتمال يؤدي إلى انفصال البيان إلى جزئين وبالتالي لا يمكن المسير في لفة من الأعلى إلى الأسفل. أي لا يمكن المرور على جميع المدن ولا توجد لفة.

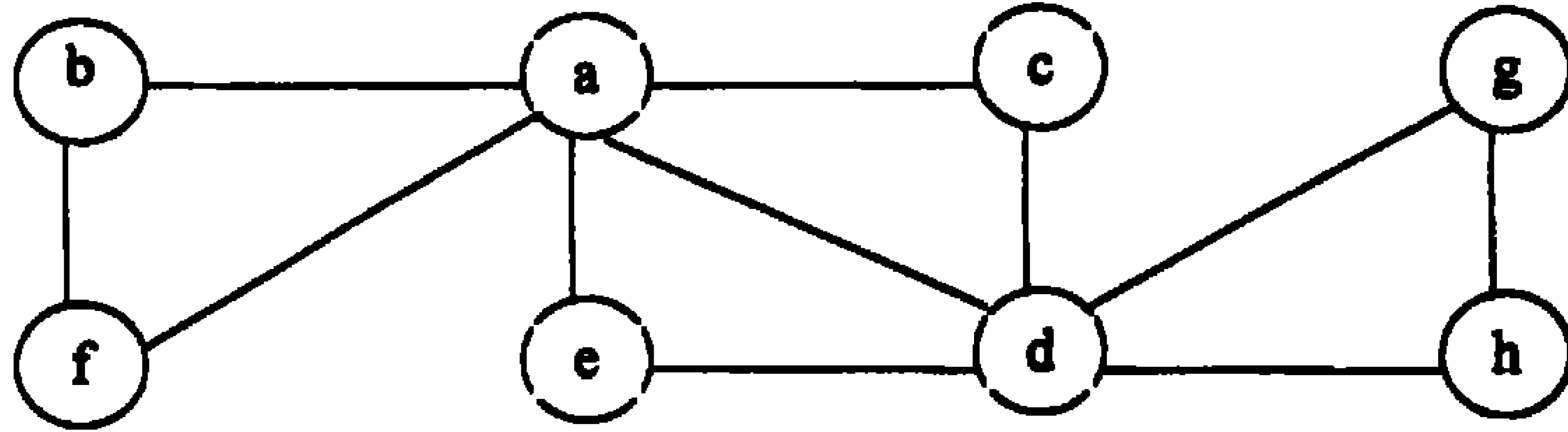
بعد هذه الدراسة المستفيضة نخلص إلى عدم وجود لفة هاميلتون داخل البيان كما انتابنا الشعور بذلك.

يجدر بالملاحظة أن حساب عدد الأضلع التي يجب حذفها كما أسلفنا قد يعطي عددا للطرق المتبقية لا يساوي عدد المدن. يوجد في هذه الحالة احتمالان:

١- عدد الطرق المتبقية أقل من عدد المدن وهذا بدوره يعني عدم وجود اللفة بسبب عدم إمكانية تحقيق الشرط الثاني (الخاصية ب).

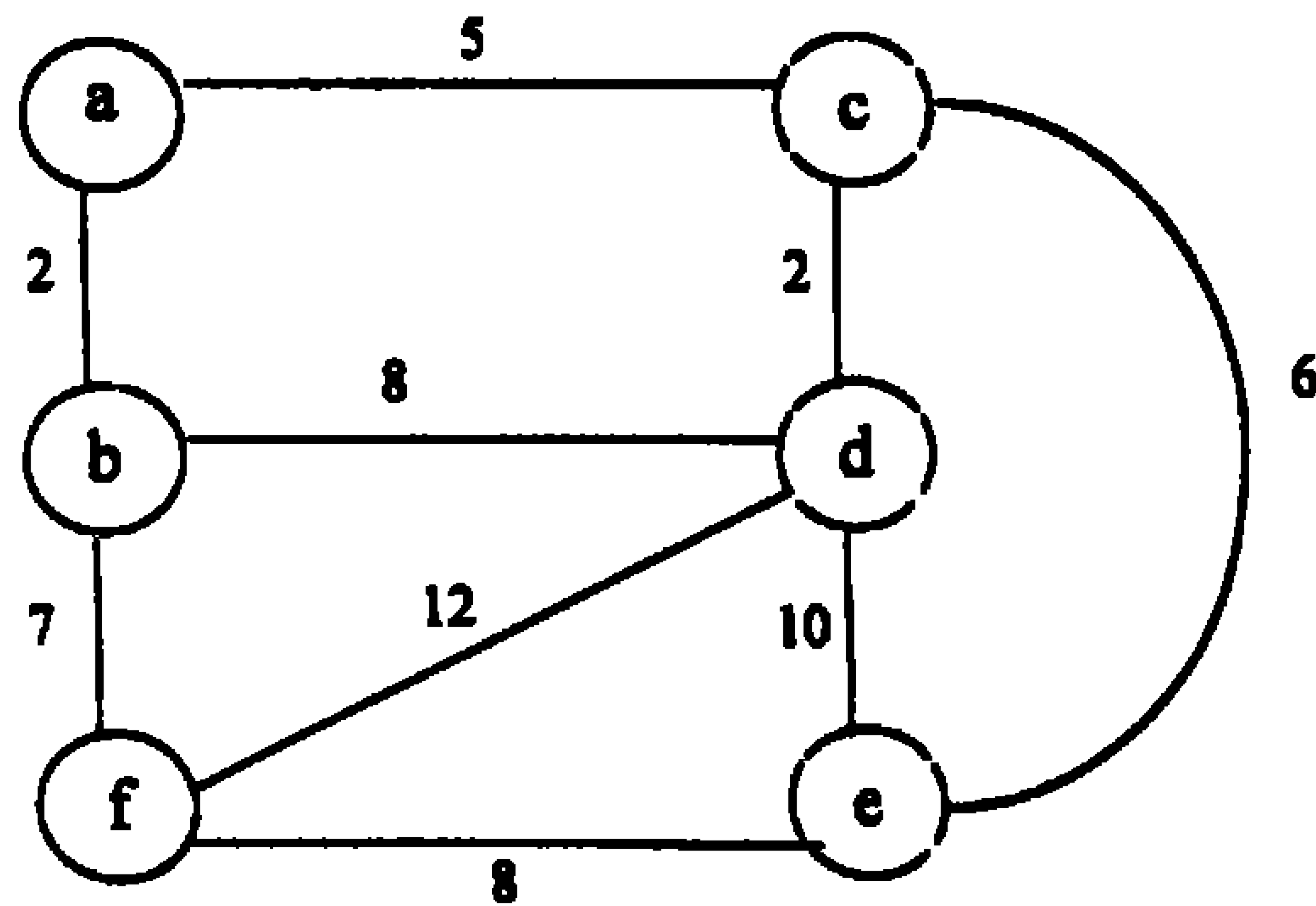
٢- عدد الطرق المتبقية أكثر من عدد المدن، وهذا الحساب لا يفيد بشكل قطعي. إذ يتوجب الآن التفكير في حذف المزيد من الطرق لكي يصبح العددان متساويان.

هذ الحذف يختلف من بيان لآخر، وعادةً توجد إمكانية لحذف طرق جديـــــدة بحيث نجد في النهاية لفة هاميلتون. كمثال آخر لننظر إلى البيان التالي:

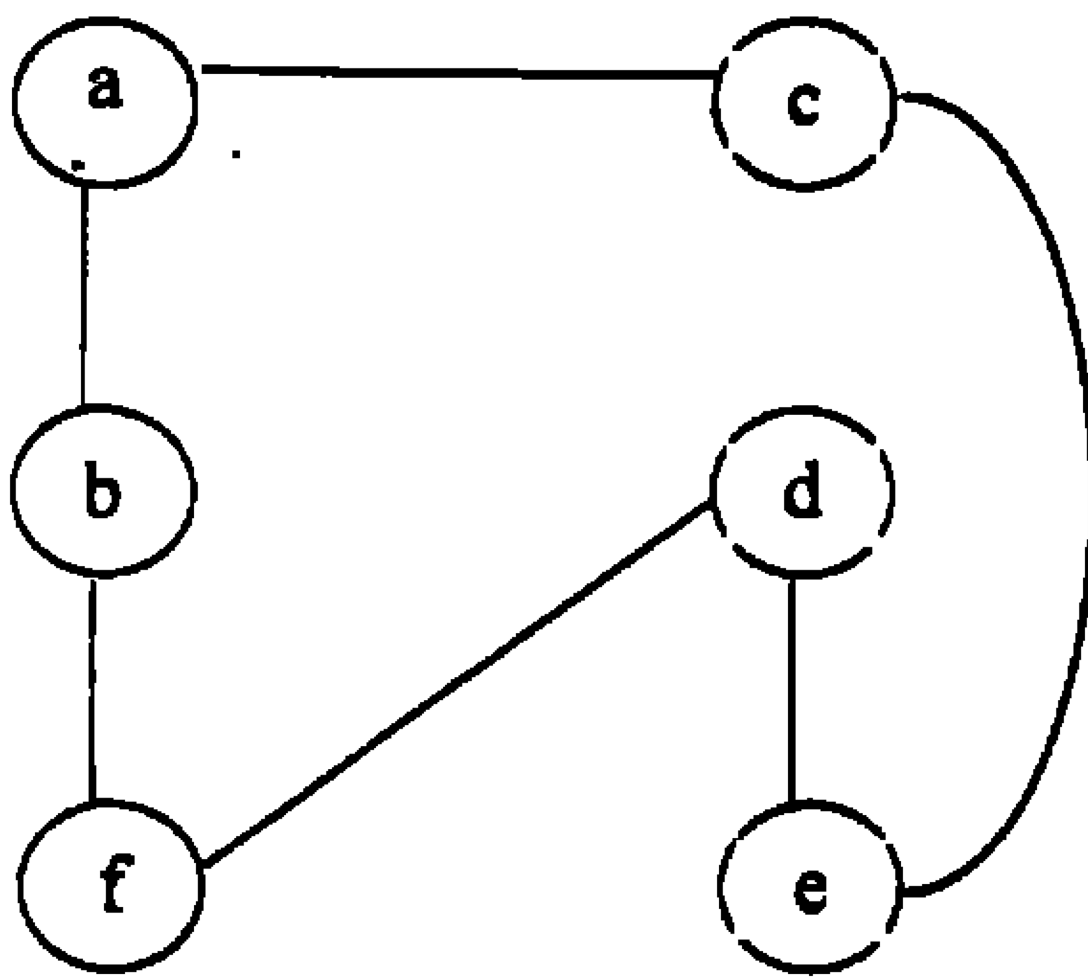


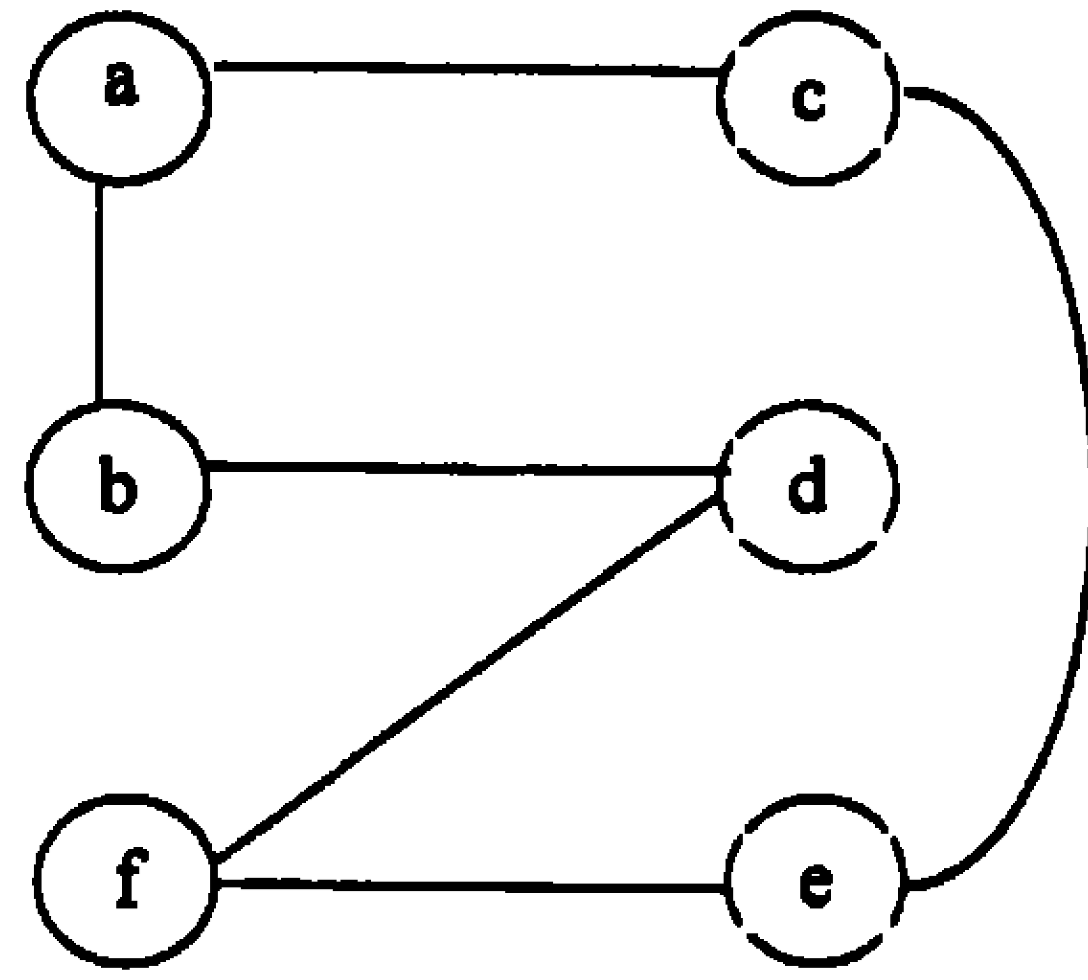
هنا لا بد من حذف ثلاثة طرق من الرأس a و طريقين من الرأس d (قد يكون الطريــق الثالث المحذوف من d هو المشترك مع a). بما أنه يوجد 11 طريقاً، إذن يبقى لدينا على الأكثر ستة طرق لاستخدامها في لفة هاميلتون. لكن هذا غير ممكن في حال وجـــــود ثمانية مدن، إذ نحتاج إلى ثمانية طرق. لذا لا توجد داخل البيان لفة هاميلتون.

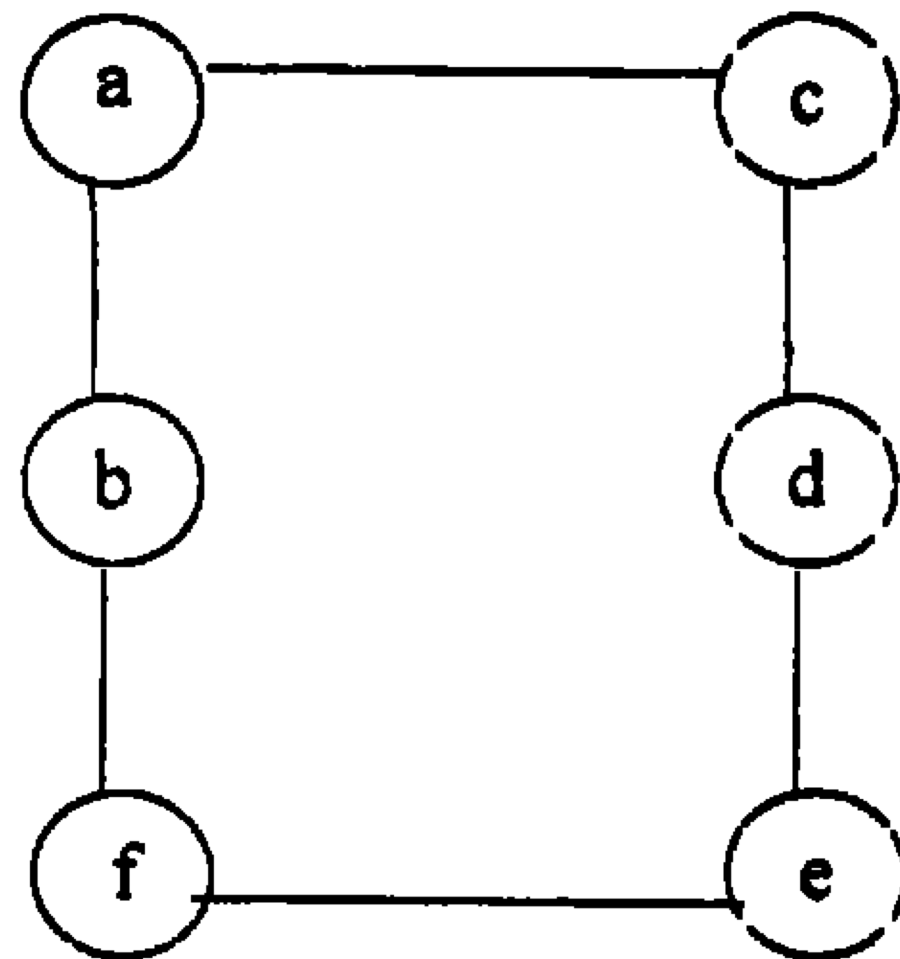
تذكر في المراجع مسألة البائع المتجول ويقصد بها إيجاد أقصر لفة هاميلتون داخـل بيان تحمل أضلاعه أرقاماً. يدل الرقم فوق الضلع في هذه الحالة على طول هذا الضلـع. مثلاً، لو نظرنا إلى البيان التالي:



يمكن بسهولة إثبات وجود ثلاث لفات هاميلتون فقط. اللفات الثلاث هي:





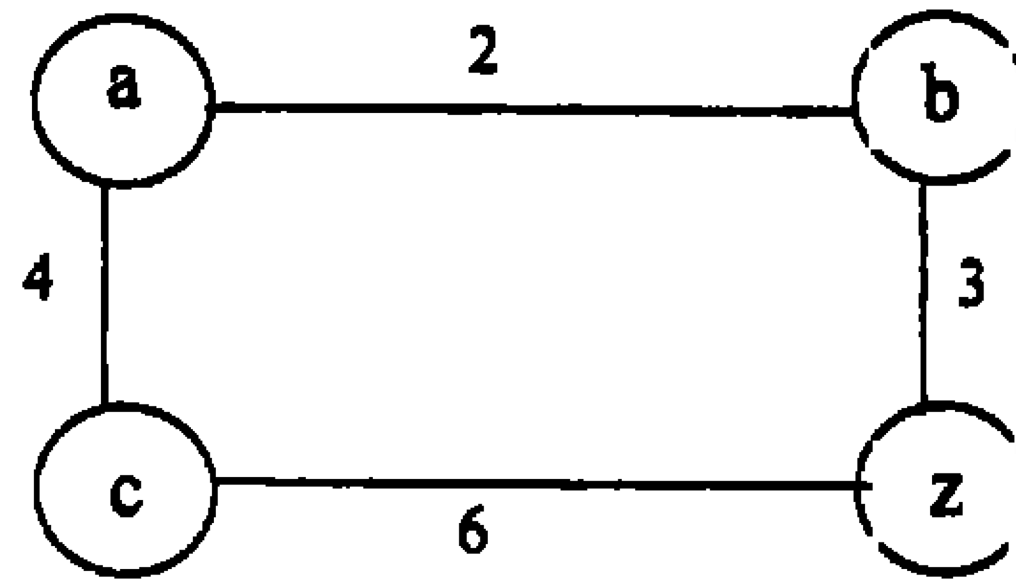


اللفة الأولى طولها 42 بينما الثانية طولها 41، أما الأخيرة فطولها 34. هذا يعني أن البائع الذي يريد أن يمر على جميع المدن بأقصر وقت ممكن يختار اللفـــة القصـــيرة (اللفـــة المستطيلة). لذا يقال بأن اللفة الثالثة هي حل لمسألة البائع المتجـــول داخـــل البيـــان بالأطول المعطاة.

الفصل الرابع

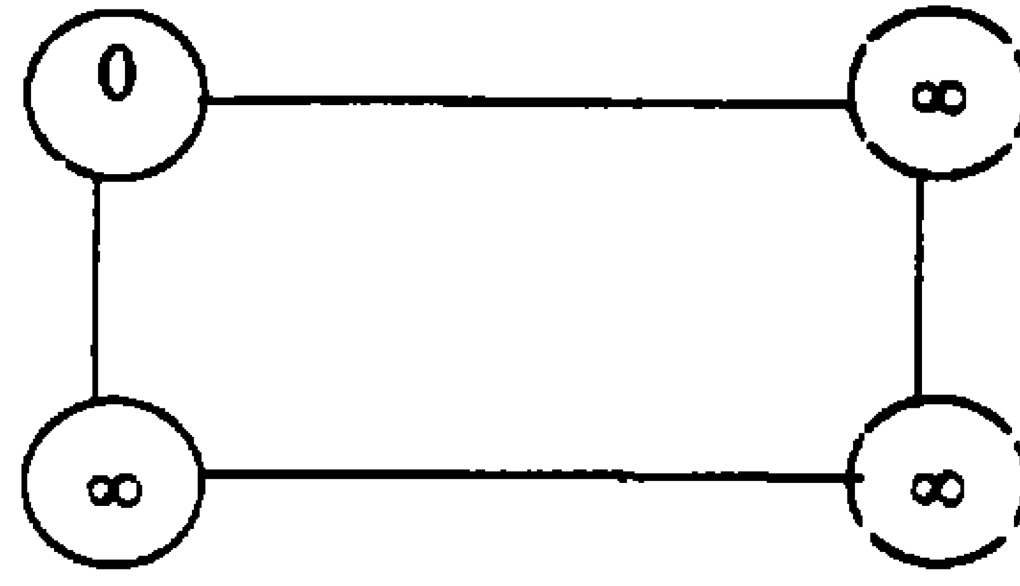
خوارزمية ديكسترا

هدف الخوارزمية المنسوبة إلى العالم ديكسترا هو إيجاد أقصر مسافة من رأس إلى آخر داخل بيان سعطى فيه أطوال الأضلاع. عادةً ما يرمز إلى الرأس الذي سننطلق منه بالرمز a والرأس الذي سينتهي عنده المطاف بالرمز z. أي لو نظرنا إلى البيان التالي:

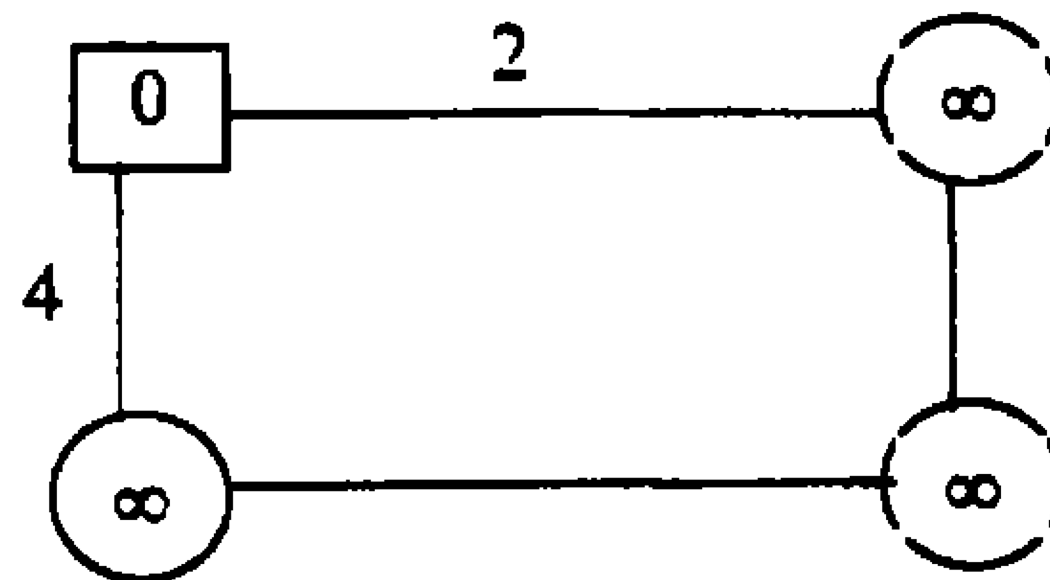


يوجد مساران من a إلى z، أولهما من a إلى b ثم z و طوله 5 أما الثاني فمن a إلى c ثم z وطوله 10. إذاً، أقصر مسافة من a إلى z هي 5. تقوم طريقة ديكسترا القابلة للبرمجة على إيجاد هذه المسافة الأقصر.

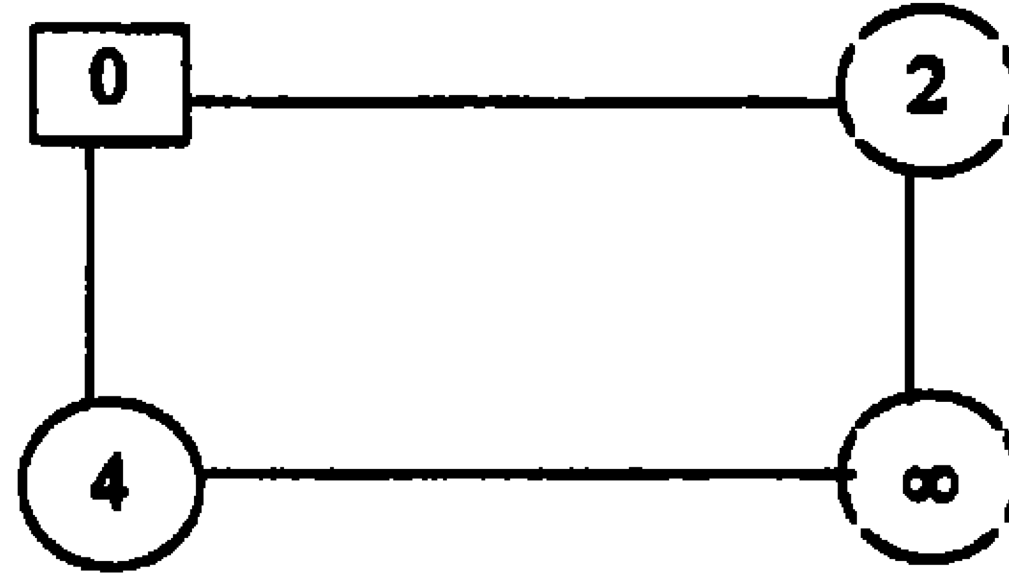
تقوم الطريقة على مبدأ استبدال الحروف داخل الدوائر بأعداد تتغير ثم تستقر ويظهر في نهاية المطاف المسافة الأقصر داخل دائرة الهدف z. في بداية الطريقة سنستبدل دائرة البداية a بالعدد 0 كدليل على الانطلاق من هذه الدائرة. أما بقية الدوائر فتأخذ قيمة كبيرة جداً وهي الما لا نهاية. أي، البيان يأخذ الشكل التالي:



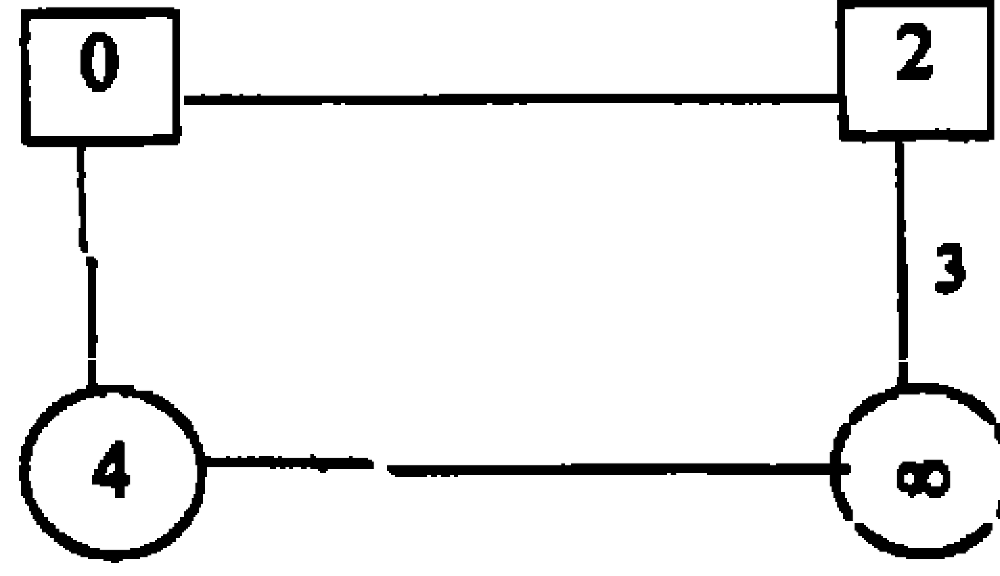
نستخدم هنا ولاحقاً مبدأ أن الدائرة ذات العدد الأصغر تصبح مربعاً بمعنى أن العدد داخل الدائرة استقر ولن يتغير إلى نهاية مراحل العمل. إضافة إلى ذلك بإمكان المربع أن يغير قيمة العدد داخل الدوائر المتصلة به بشكل مباشر . تغيّر العدد داخل الدائرة يعتمد على مبدأ أنه إذا كان مجموع العدد داخل المربع مع العدد المكتوب فوق الضلع المؤدي إلى هذه الدائرة أكبر من العدد الموجود أصلاً داخل الدائرة، فإن العدد داخل الدائرة يتم استبداله بالعدد الأصغر. هذا منطقي حيث أننا نبحث عن أقصر مسافة ولذا نختار أصغر الأعداد. لإيضاح الفكرة هندسياً نرسم المربع مع وضع الأرقام فوق الأضلع التي تشبكه مع دوائر مباشرة كما جاءت في البيان الأصلي. أي البيان الأخير يصبح كالتالي:



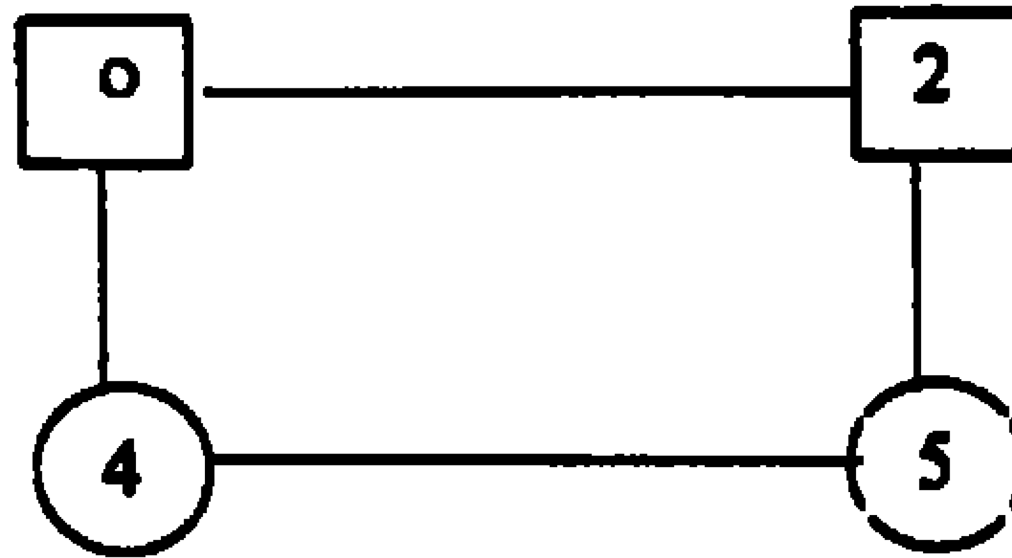
قد يطرأ تغير على قيم الأعداد داخل الدوائر التي يصلها ضلع مرقم وهما دائرتان. لمعرفة وجوب التغير أم لا نحسب مجموع صفر واثنين فينتج اثنين وهو عدد أقل من ∞. إذاً، الدائرة في أعلى اليمين يصبح فيها العدد اثنين بدل ∞ . كذلك الحال بالنسبة للدائرة أسفل اليسار حيث نستبدل فيها العدد ∞ بالعدد 4 لأنه عدد أصغر. لذا، يصبح الشكل الجديد للبيان كالتالي:



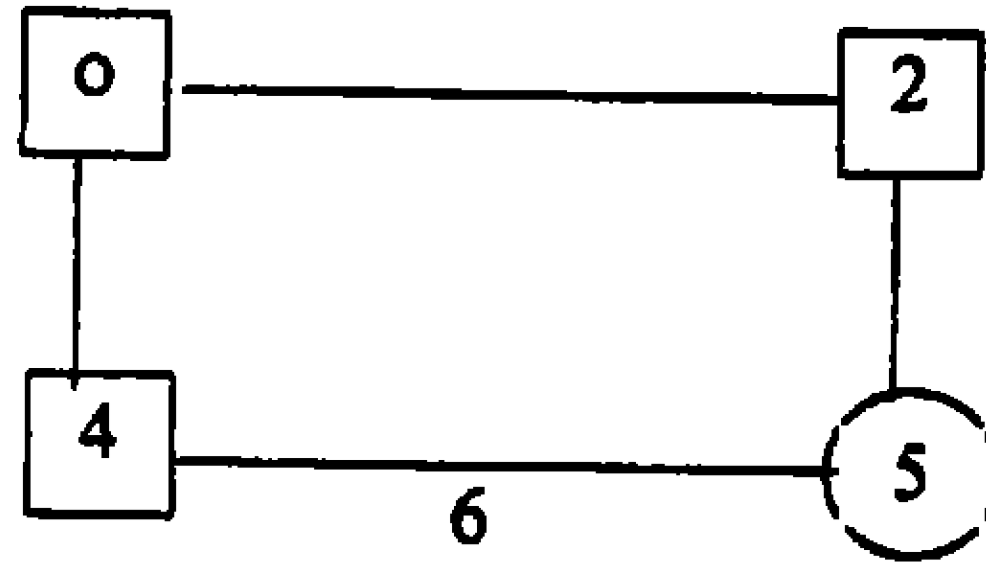
سنعيد الآن إجراء هذه الخطوات، أي نختار أولا الدائرة ذات العدد الأصغر من بين الدوائر الثلاث المتبقية. هذه الدائرة تصبح مربعا. هذا المربع يتصل مع دائرة واحدة بشكل مباشر فنضع طول الضلع الواصل بين الدائرة والمربع فوق الضلع. أي نحصل على



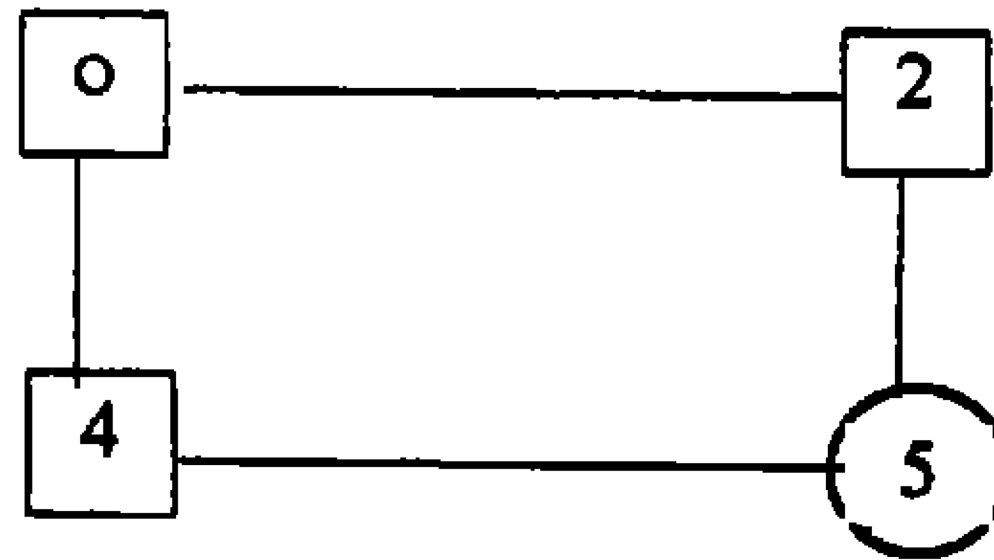
حسب المبدأ الذي ذكرناه المربع الجديد سيغير قيمة العدد داخل الدائرة، إذا كانت قيمة جمع العدد 2 إلى العدد 3 أصغر من القيمة الموجودة حاليا. فعلا، سنستبدل العدد القديم ∞ بالعدد الجديد 5.



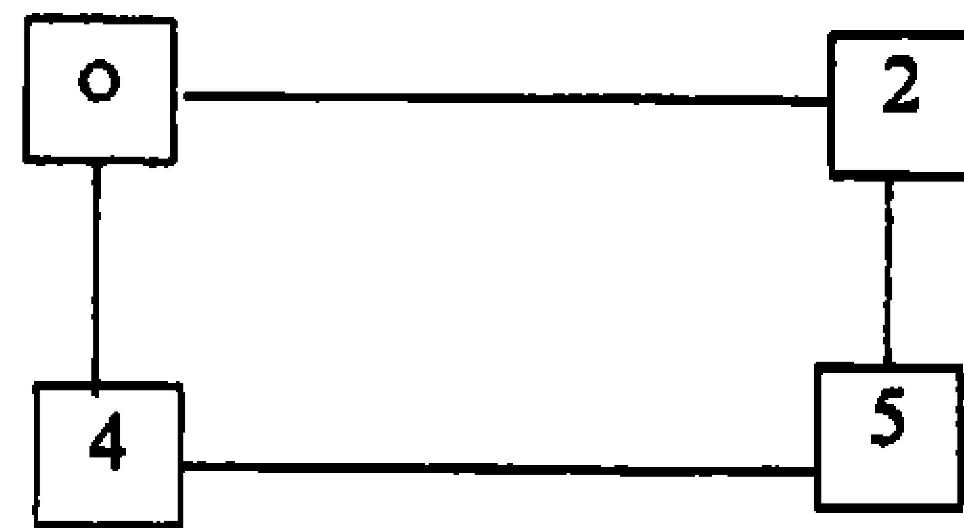
بقي لدينا دائرتان تتنافسان على من تصبح مربعا قبل الأخرى. الفوز طبعا من نصيب الدائرة الأصغر وهي الدائرة التي تحمل العدد 4. هذه الدائرة متصلة بضلع طوله 6 مع الدائرة الأخرى بشكل مباشر. لذلك، سنرسم البيان كالتالي:



ونفكر في مجموع 4 مع 6، هل المجموع أصغر من العدد الأصلي 5 أم لا؟ الجـواب لا، في هذه الحالة نبقي الدائرة كما هي أي نحافظ على العدد 5 بداخلـها لأنـه العـدد الأصغر. إذاً، نتيجة التفكير السابق تكون البيان التالي:

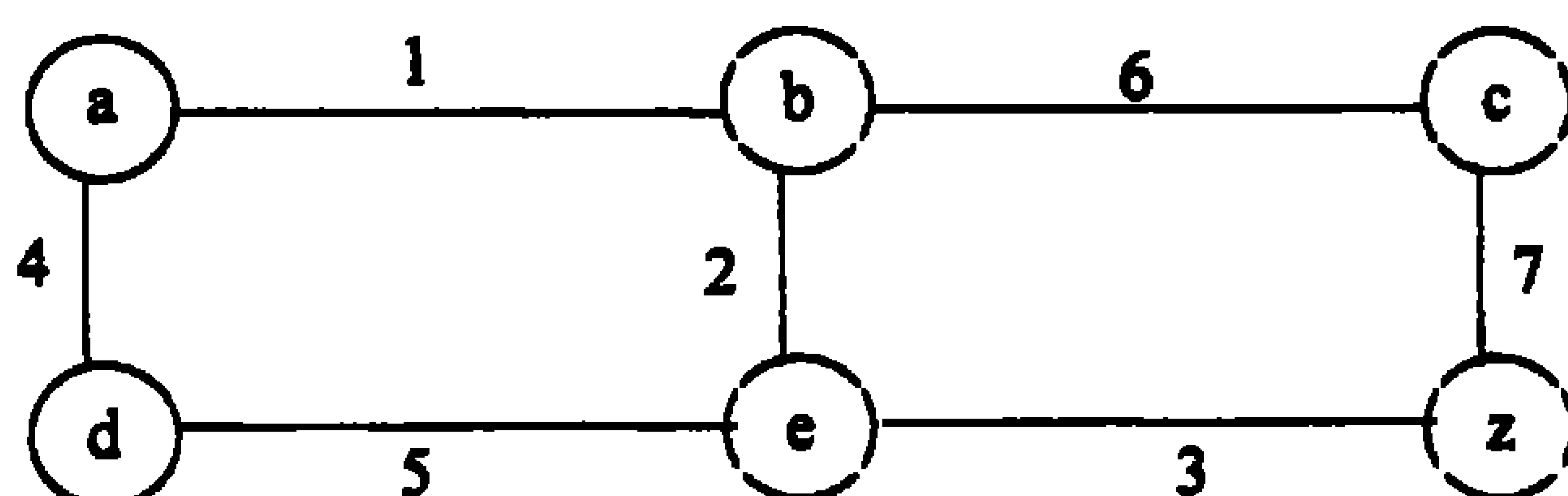


نعود لخطوة اختيار الدائرة التي ستصبح مربعاً. لا يوجد سوى دائرة واحدة، لذا تصبح هذه الدائرة دون منافسة هي المربع الجديد. هذا المربع لا يتصل مع أي دائرة مباشـرة، لذا لن يكون بمقدوره تغيير شيء في البيان. عملياً نكون قد انتهينا لأن جميع الدوائـر أصبحت مربعات. أي الجواب النهائي يكون

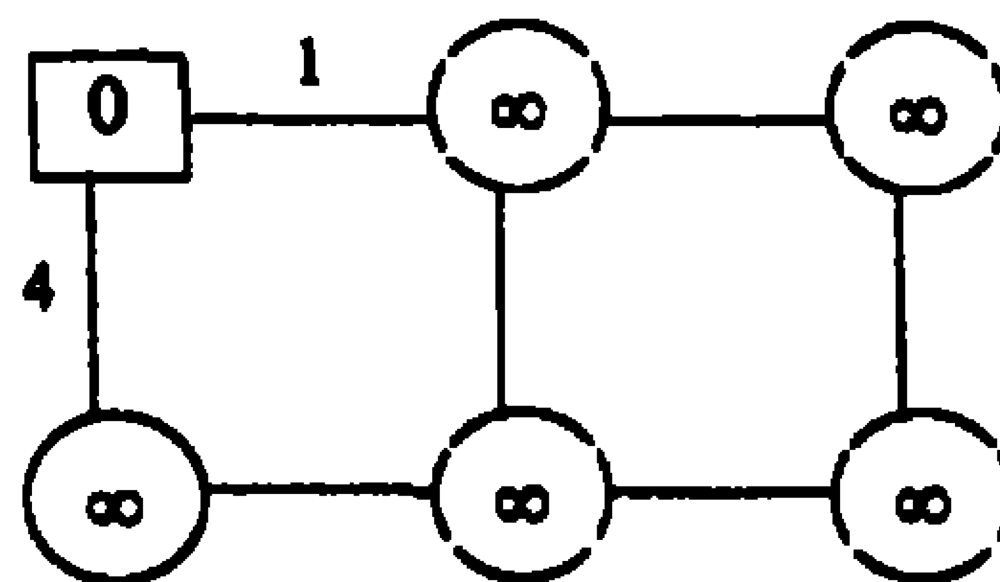


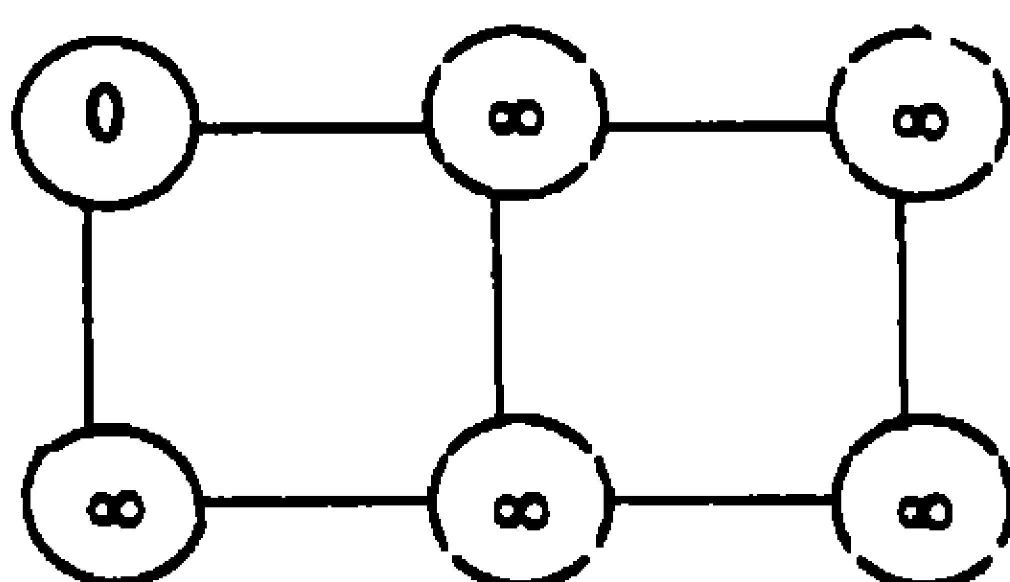
يوجد سبب أقوى للوقوف، ألا وهو أن دائرة الهدف في أسفل اليمين أصبحـت مربعـاً. هذا هو السبب المعتمد لإيقاف الطريقة بشكل عام. الآن نرى في دائرة الهـدف المربـع الذي يحمل بداخله العدد 5. هذا معناه أن الجواب المطلوب هو خمسة، تماماً كما توقعنا.

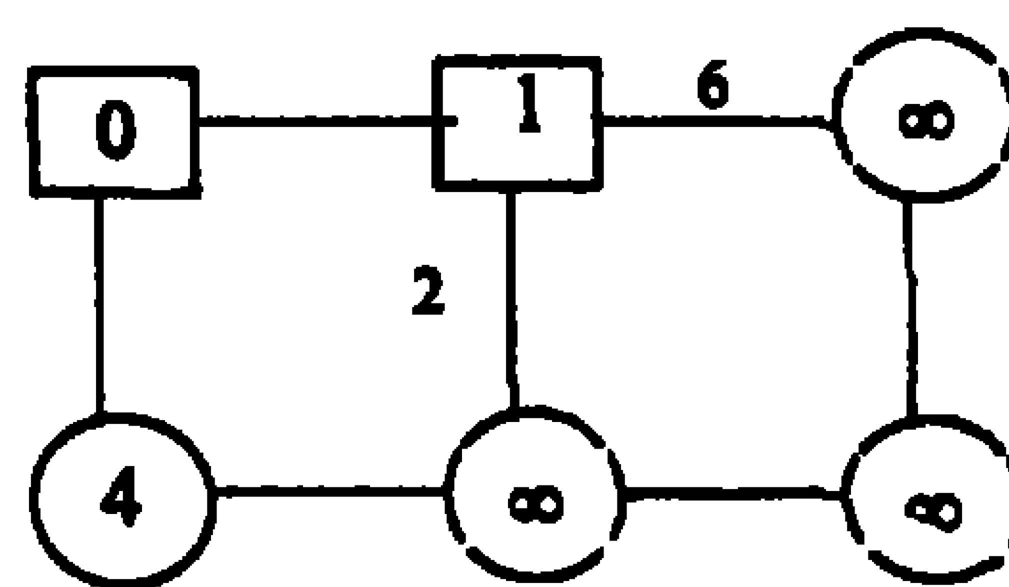
سنعطي الآن مثالا آخرا بحيث نستخدم الرسم أكثر من الكتابة ونرسم كل خطوتين معا. تكون الخطوة الأولى في كل سطر هي خطوة اختيار الدائرة تليها خطوة وضع الأطوال على الأضلع التي تصل المربع الجديد بالدوائر الأخرى بشكل مباشر. تأثير المربع الجديد المحتمل على هذه الدوائر يظهر في السطر اللاحق. المسألة الآن هي إيجاد أقصر طريق من a إلى z في البيان التالي:

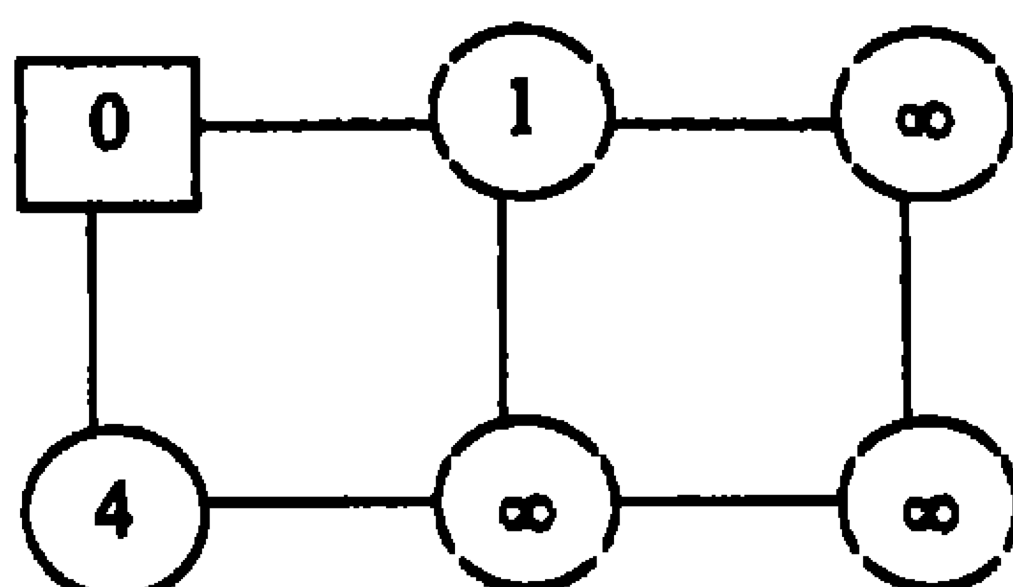


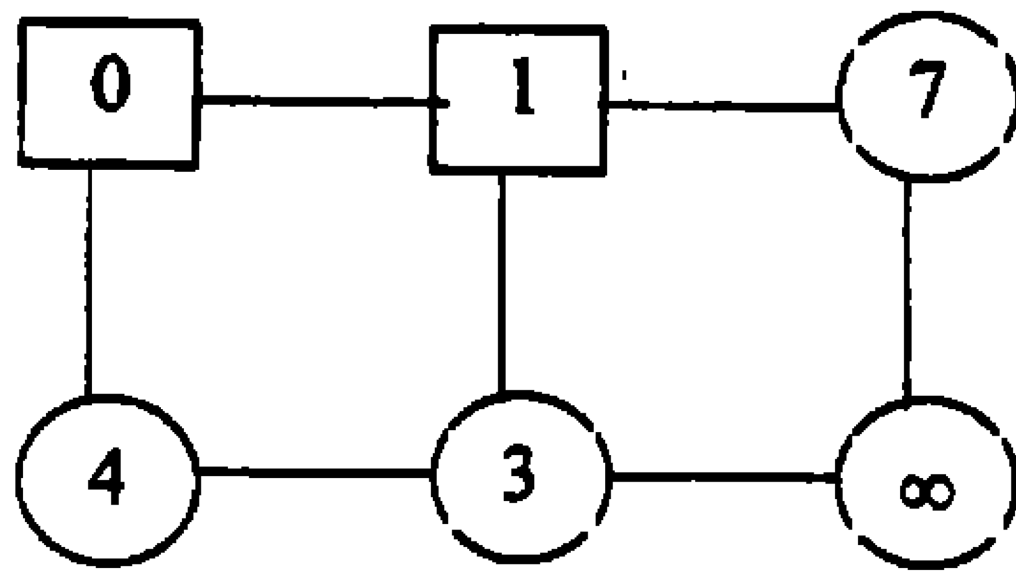
نبدأ بالحل هندسيا مع مراعاة أننا يجب أن نجمع دائما عددين ونستبدل في حال تكون عدد أصغر من الموجود أصلا. هاك الحل:

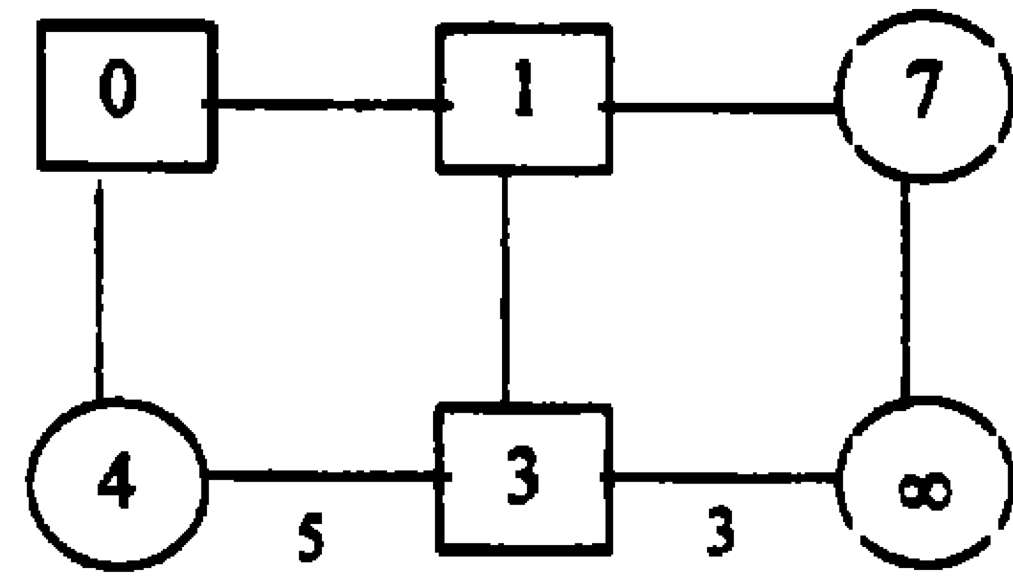


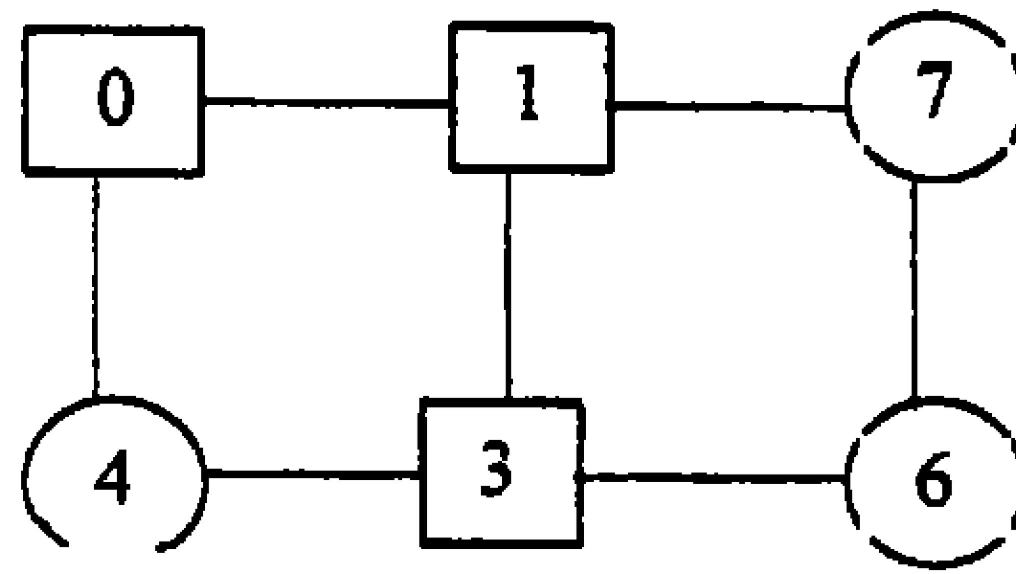


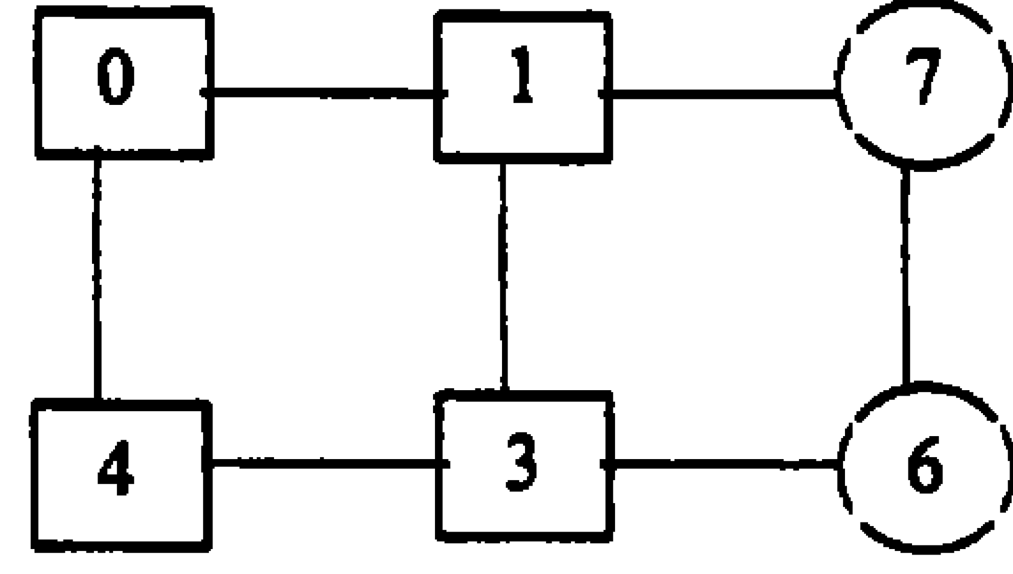


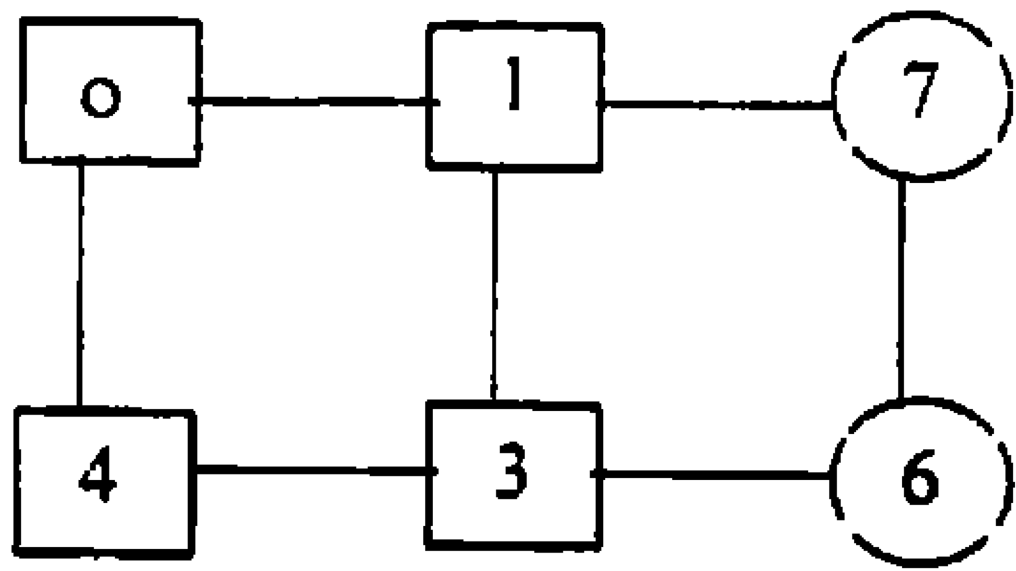


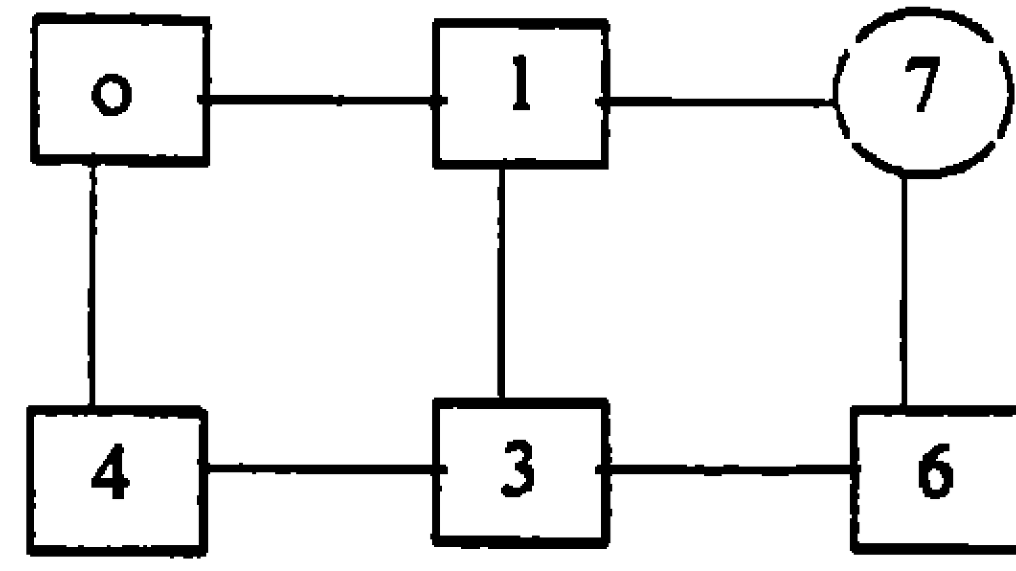












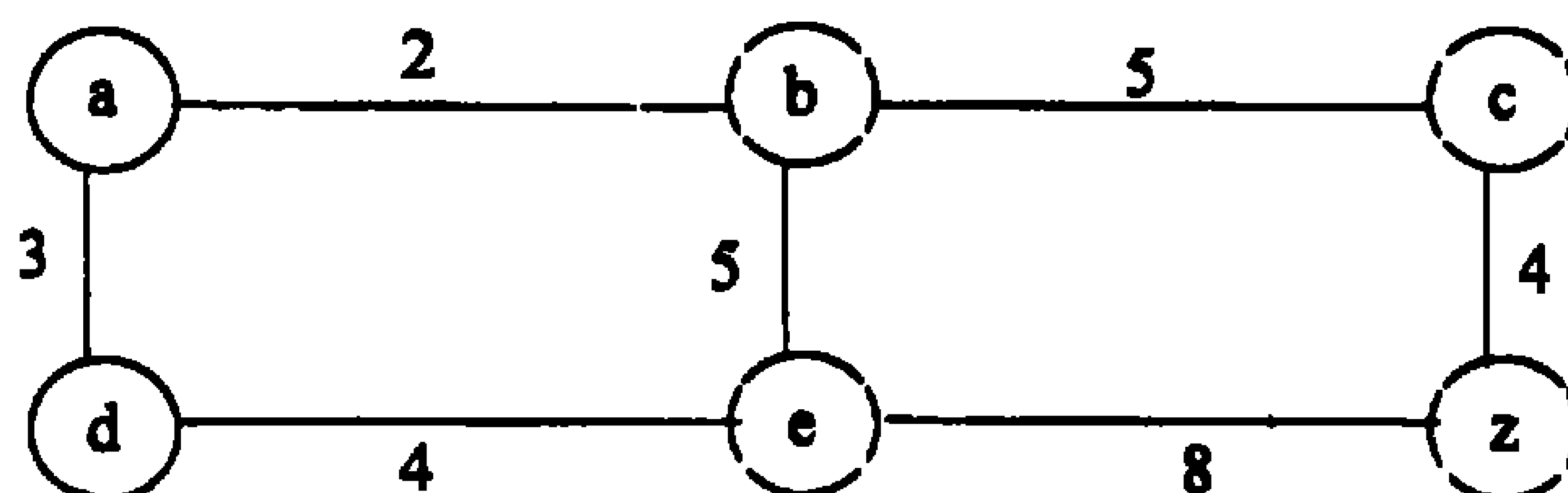
لاحظ أن مربع العدد 4 لم يغير شيئاً بسبب عدم اتصاله مباشرة بدوائر أخرى. كما لاحظ أننا توقفنا عندما أصبحت دائرة الهدف مربعاً يحمل بداخله العدد 6. هذا معناه أن الجواب المنشود هو العدد 6، أي أقصر طريق من a إلى z طوله 6. من خلال النظر يمكن معرفة أقصر طريق والذي يبلغ طوله 6. هذا الطريق هو

$$a \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow z$$

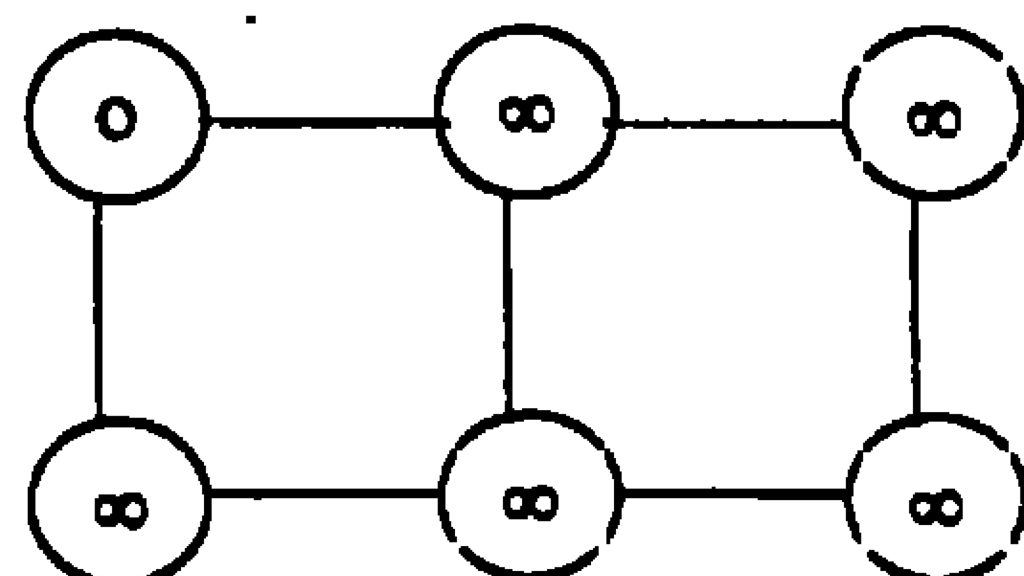
لاحظ أيضاً أنه في جميع مراحل العمل قيم الدوائر أكبر من قيم المربعات. هذا معزاه إلى أن أصغر دائرة تصبح دائماً هي المربع الجديد. كما لاحظ أن المربعات تأتي بشكل متصاعد، أي أولاً يكون لدينا مربع الصفر ثم مربع الواحد ثم مربع الثلاثة ثم مربع

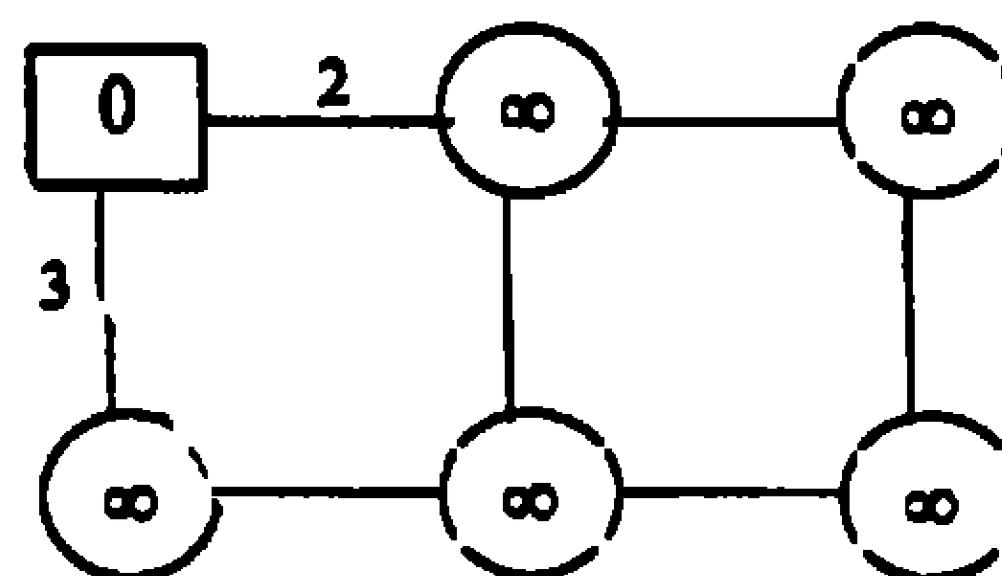
الأربعة وأخيرا مربع الستة. هذا معزاه إلى أن المربع الجديد ينشأ من الدوائر التي تكـــون أكبر من المربعات الموجودة في تلك اللحظة.

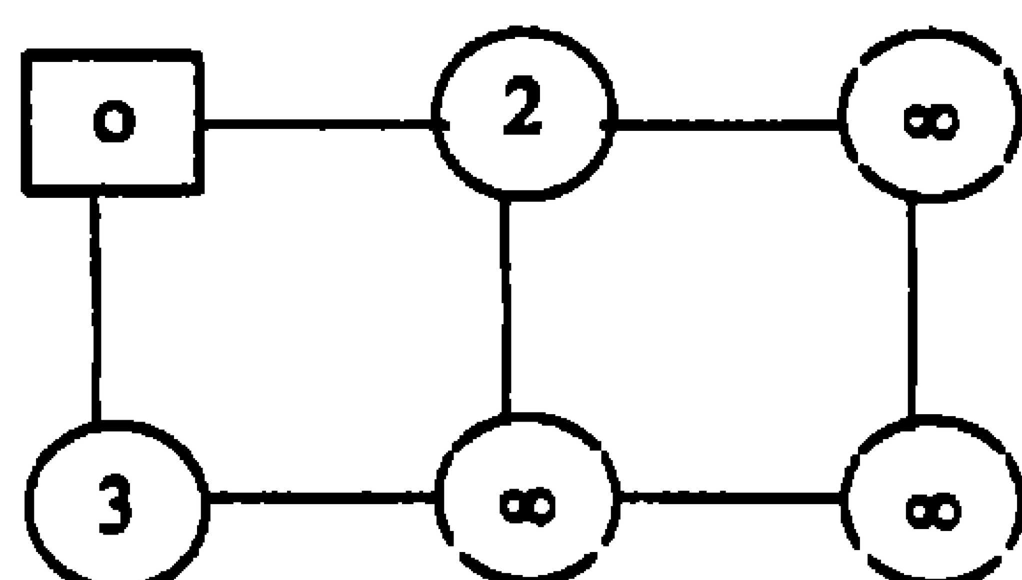
قد يخطر على البال السؤال ماذا يحدث لو أنه وحد دائرتان تحملان أصغر قيمـــــة عددية في تلك اللحظة؟ في هذه الحالة وغيرها من الحالات القادمـــــة في الرياضيـــات المنفصلة سنعتمد مبدأ الأولوية حسب الأبجدية. هاك مثالا على ذلك: البيان الأصلــــي هو

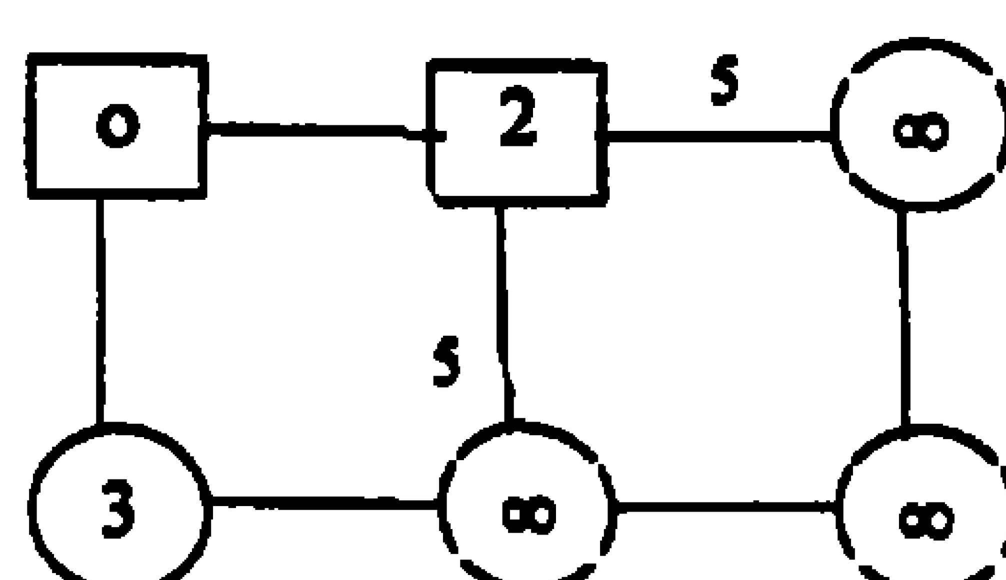


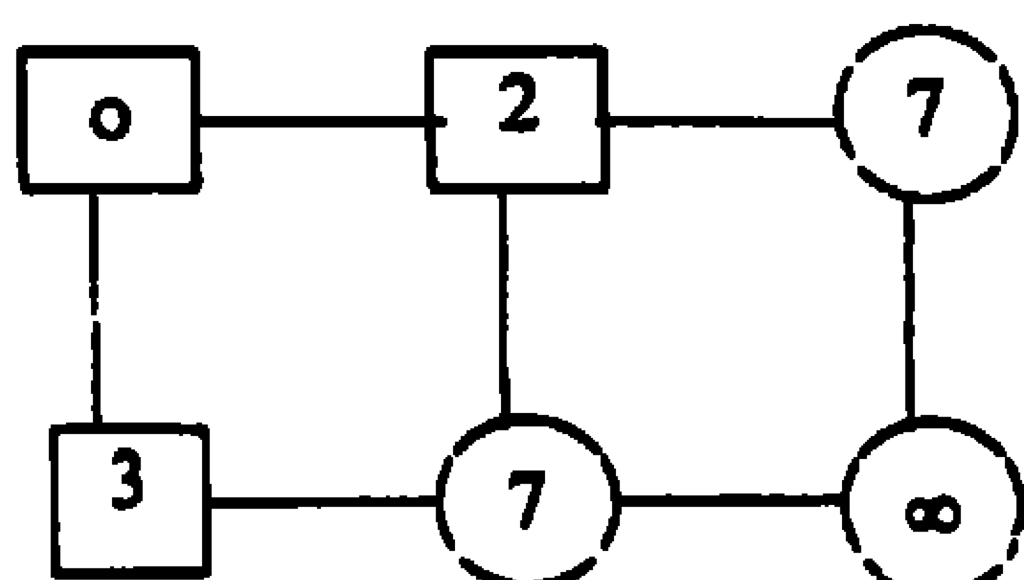
تطبيق طريقة ديكسترا على هذا البيان يكون كالتالي:

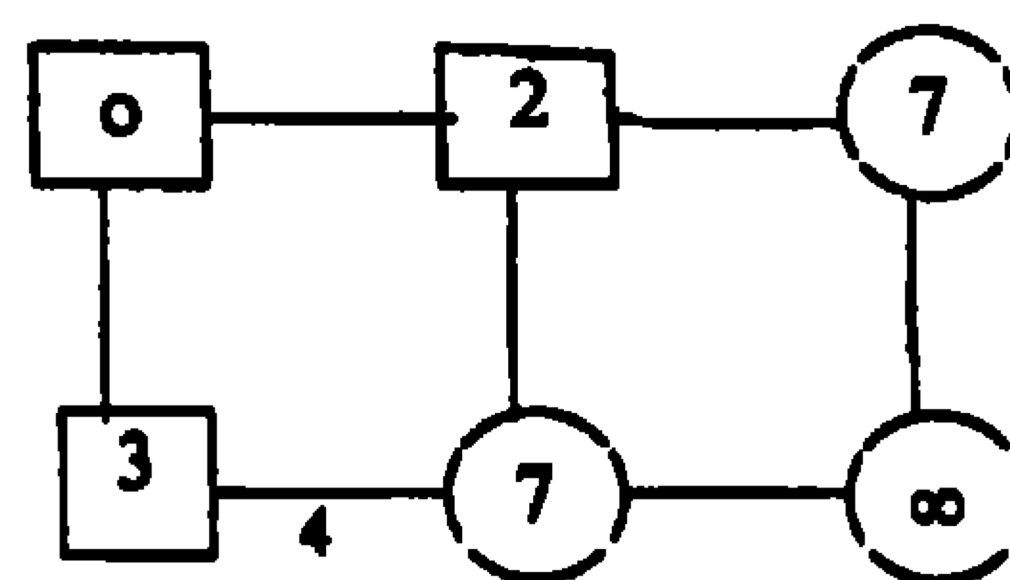


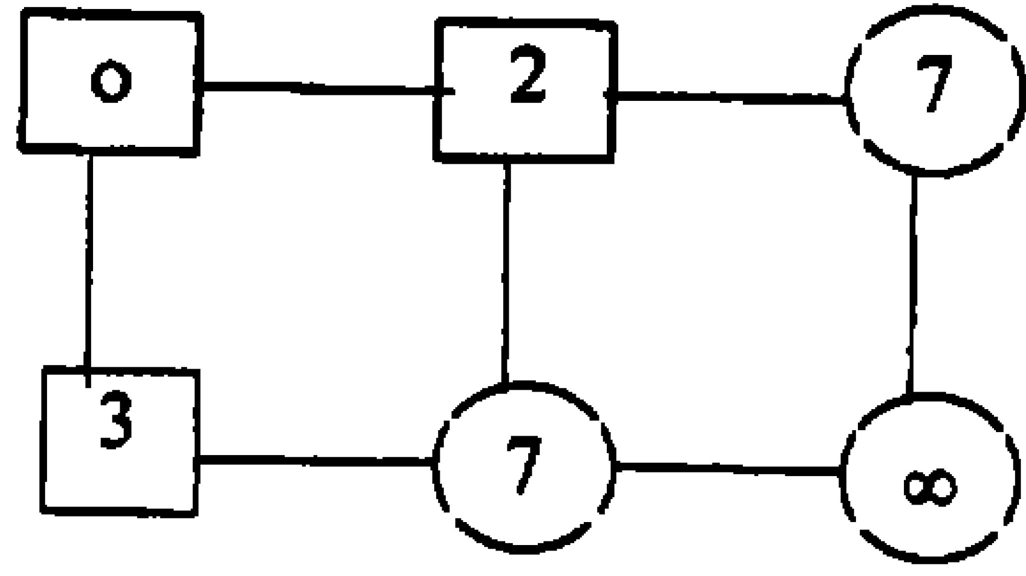


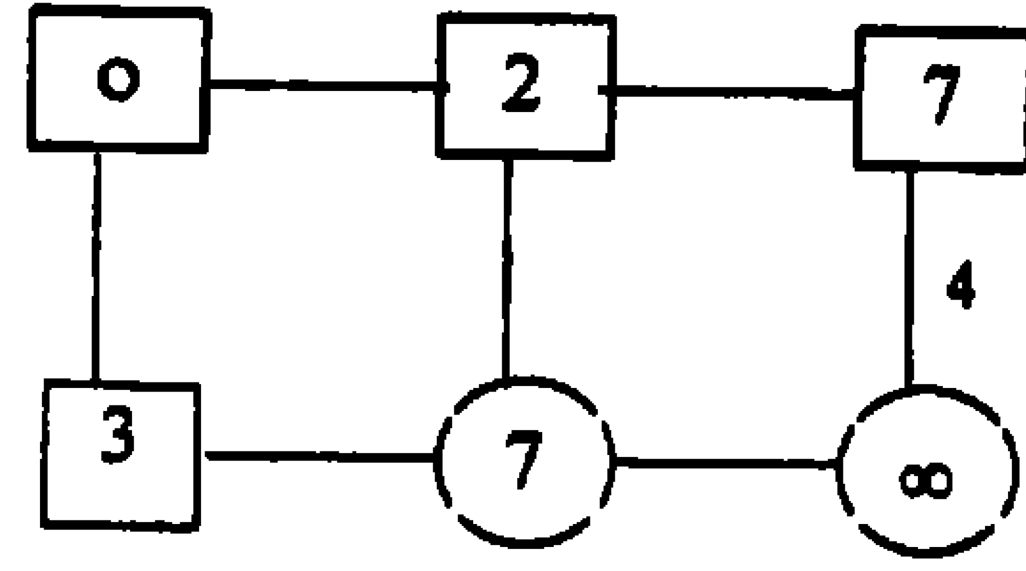


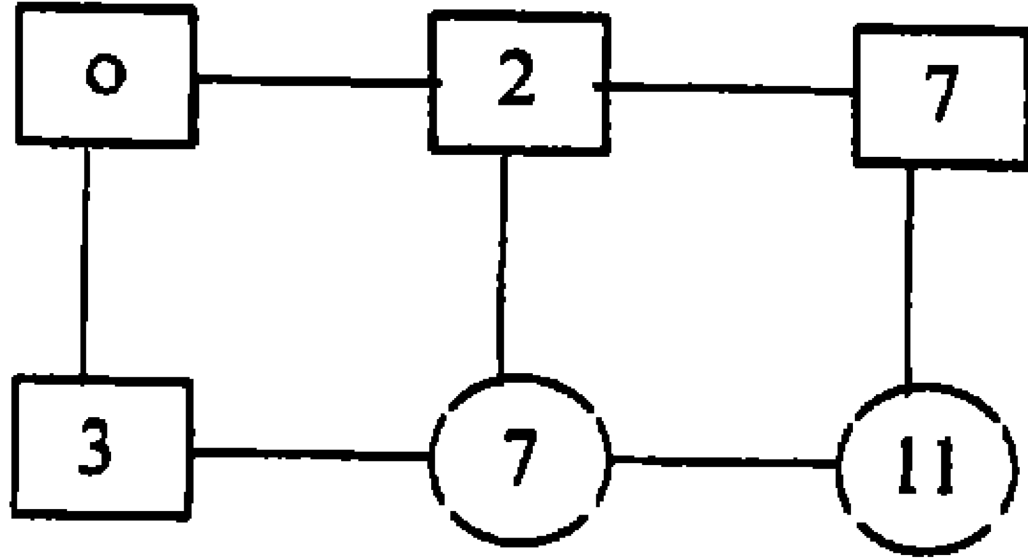


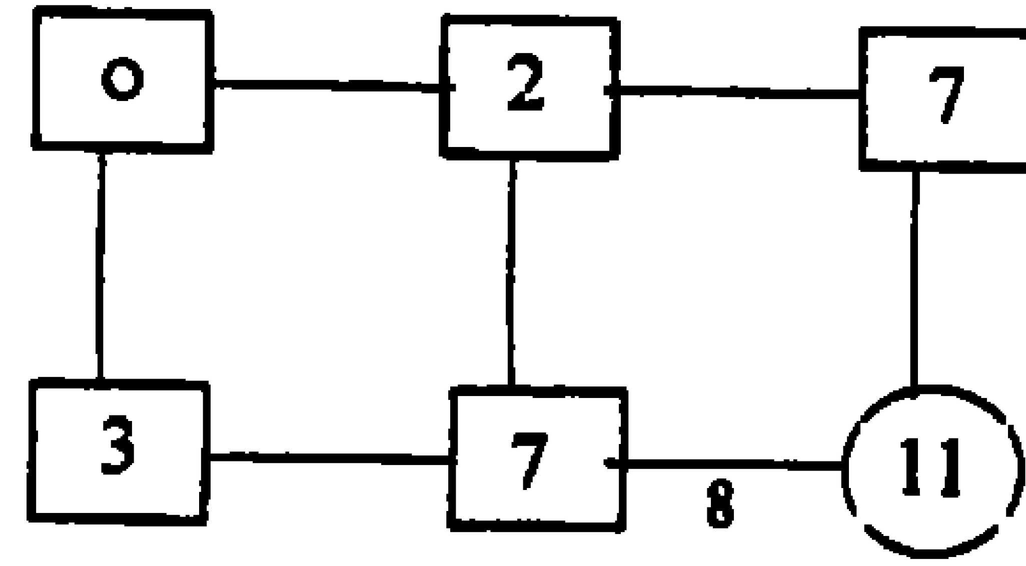


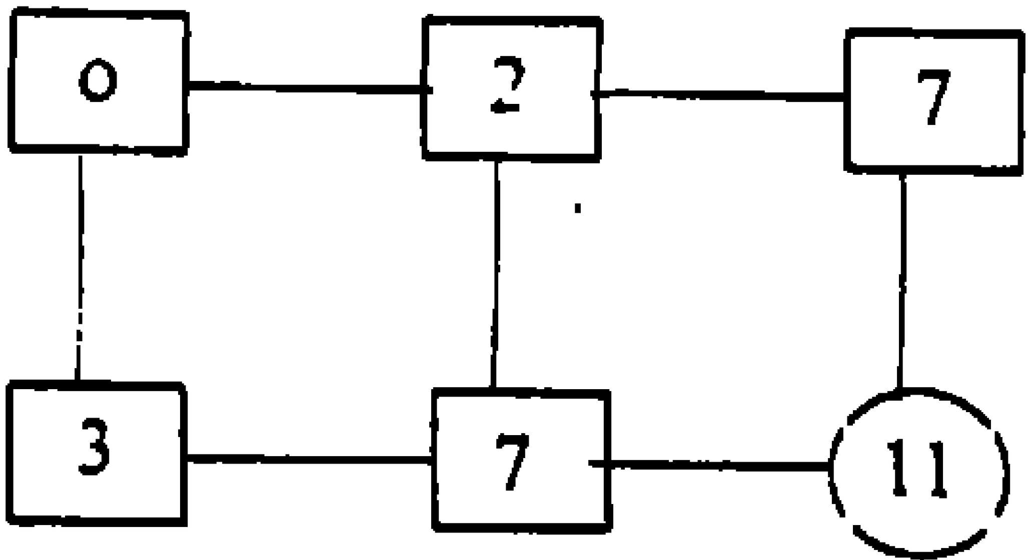


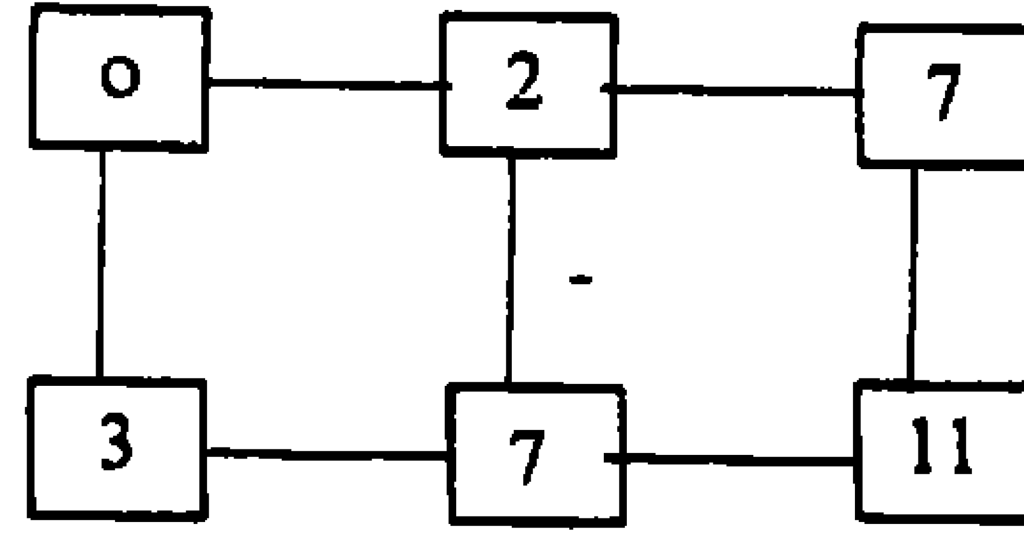












لاحظ أن مبدأ المربع يحمل في داخله أقصر مسافة إلى هذه الدائرة من دائرة a لا ينطبق فقط على دائرة الهدف z بل ينطبق على جميع الدوائر داخل البيان. الدائرة a يحوي مربعها العدد صفر للدلالة على أن أقصر طريق من a إلى a هي صفر (البقاء في المكان). أما الدائرة b أو d فأقصر الطرق إليهما هي الطريق المباشر من a إلى الدائرة المنشودة. بالنسبة للدائرة e أقصر طريق طوله 7 وهو قد يكون المسار

$$a \rightarrow b \rightarrow e$$

أو المسار

$$a \rightarrow d \rightarrow e$$

الباب الرابع
الأشجار

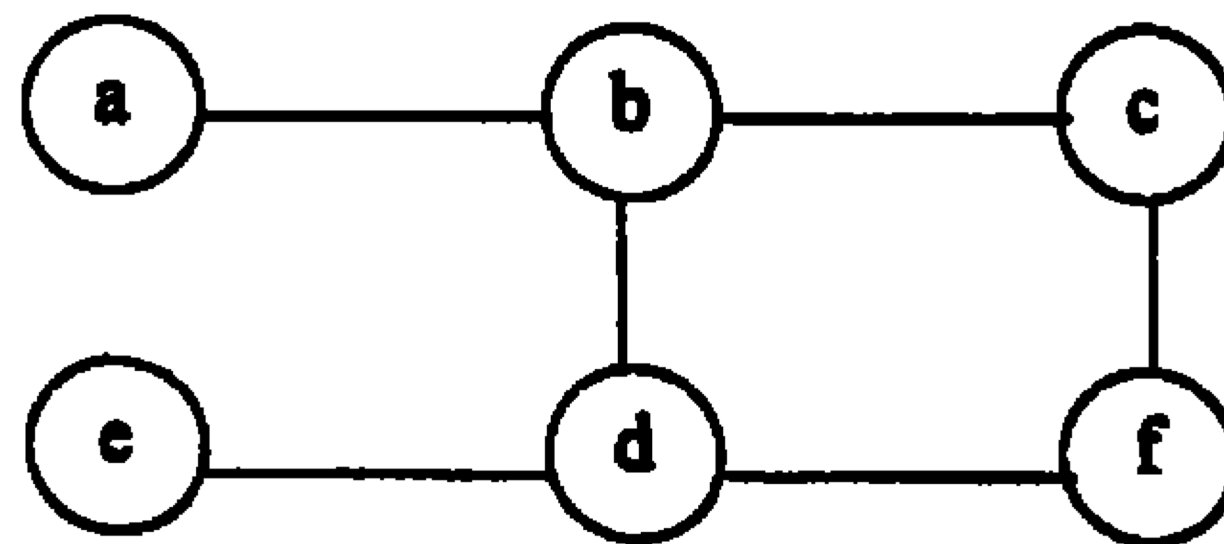
الفصل الأول
مفهوم الشجرة الرياضي

تستخدم كلمة الشجرة معنوياً للدلالة على تفاصيل العلاقات داخل أسرة كبيرة حيث توجد نقطة (الجد الأكبر) تتفرع منها فروع في سطر أسفل من سطر النقطة المفرعة. الفروع تؤدي إلى نقاط جديدة والتي بدورها تفرع إلى مستويات أدنى. نحن سنقوم برسم أشكال مشابهة على أنها أشجار بمفهوم الرياضيات. لكن سنعرّف الشجرة على أنها نوع من أنواع البيان. أي بيان متصل يمتلك الخاصيتين:

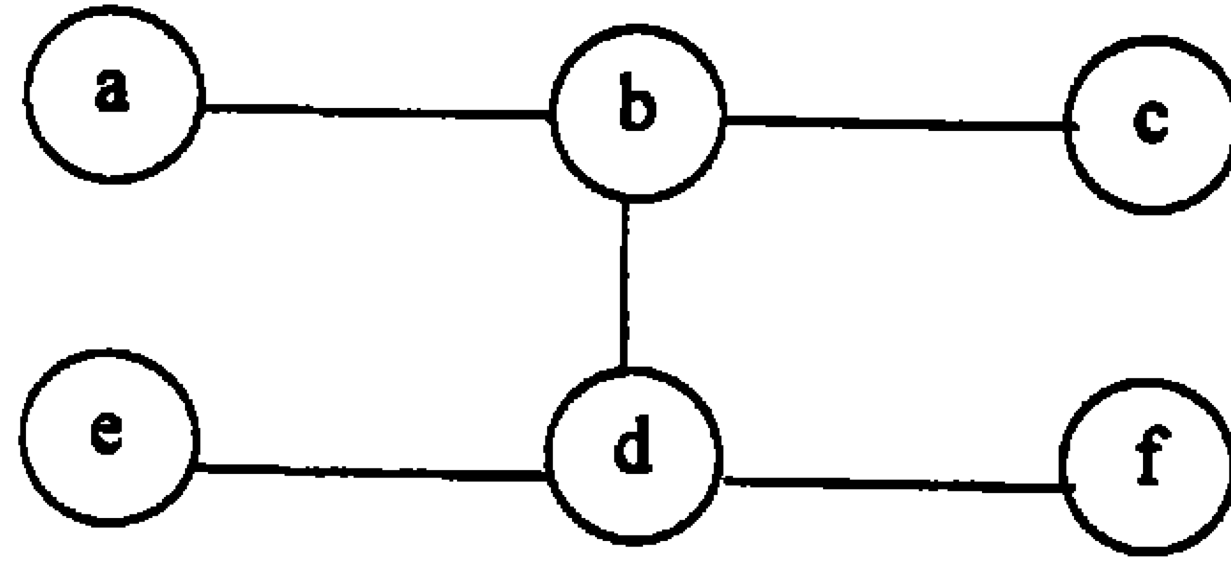
أ- لا توجد داخل البيان لفات بسيطة، أي لا توجد أشكال مغلقة،

ب- عدد الأضلع أقل من عدد الرؤوس بواحد،

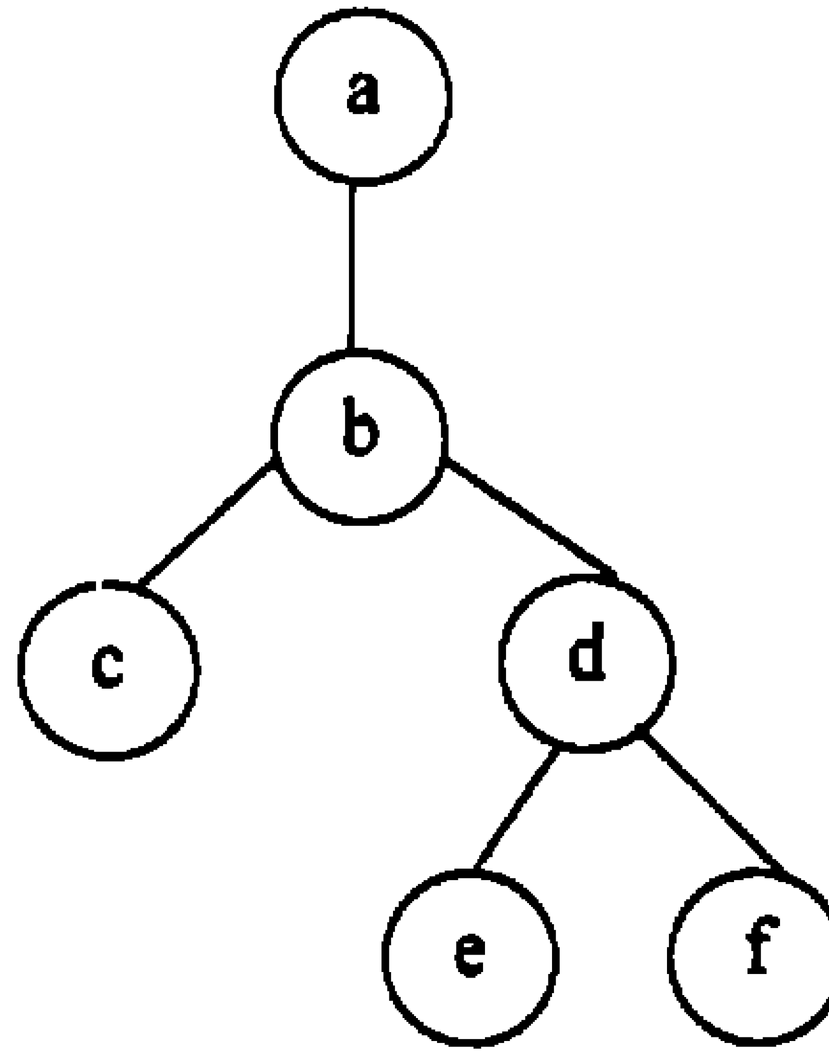
يدعى شجرة. كتعريف بديل يمكن القول أن أي بيان ينفصل إلى جزئين عند إزالة أي ضلع من أضلاعه يعتبر شجرة بالمفهوم الرياضي. مثلاً، البيان التالي



ليس شجرة لأن إزالة الضلع بين b و d لا تفصل الشكل إلى قسمين. بينما البيان التالي:



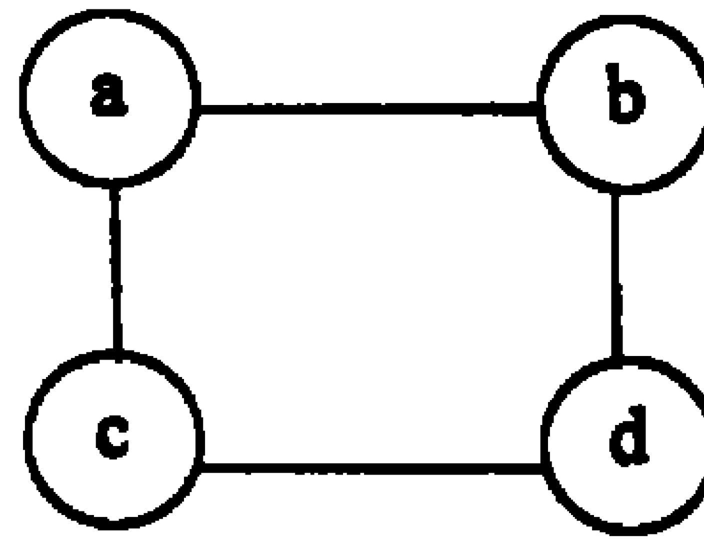
يعتبر شجرة لأنه متصل ومكون من مربعين مفتوحين، ثم عدد أضلعه خمسة وعدد رؤوسه ستة. البيان السابق ليس شجرة بالمفهوم الهندسي المتعارف عليه كما وصفنا شجرة العائلة. يتم تحويل هذا البيان إلى شجرة بالمفهوم الهندسي من خلال إعادة رسمه كالتالي:



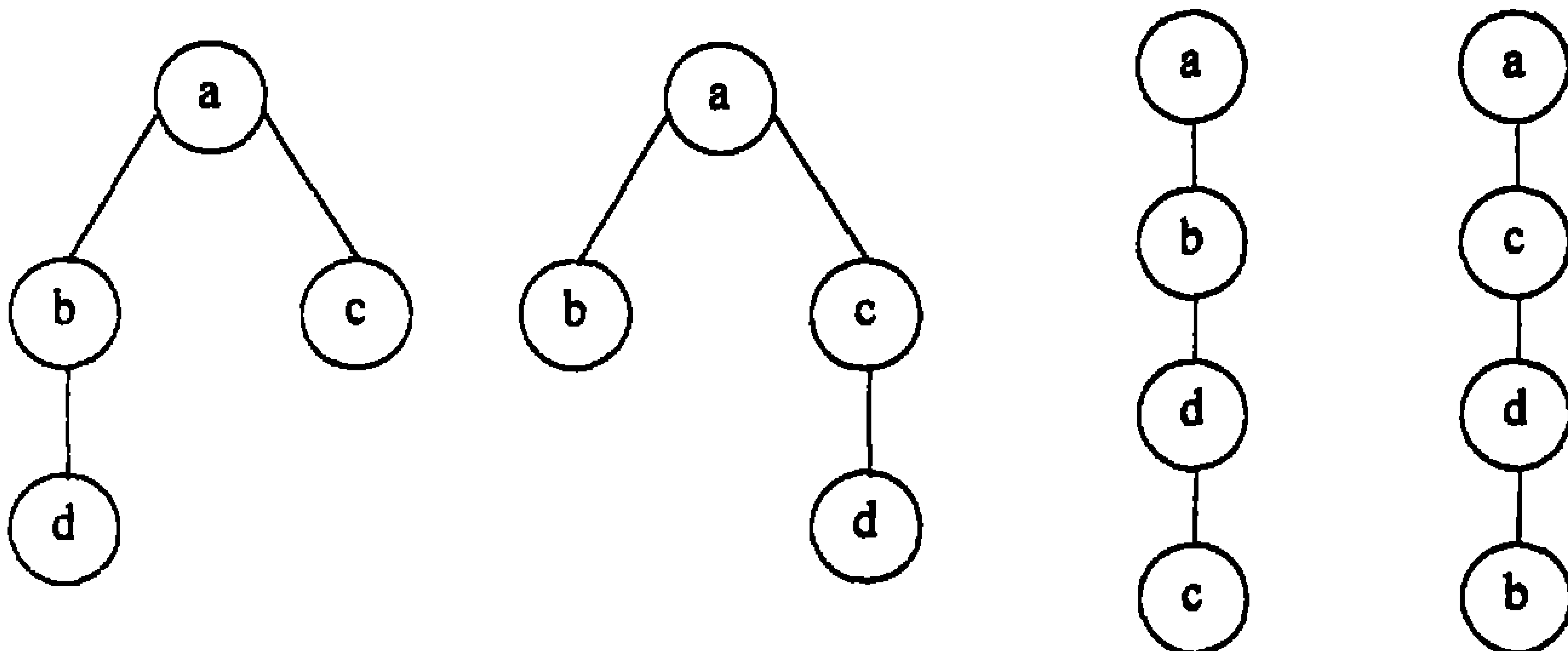
لاحظ أننا استخدمنا نفس الأضلع بين الرؤوس الستة ولكن وضعنا الرؤوس بمستويات مختلفة. سنضع دائماً الرأس a في أول سطر ونطلق عليه اسم جذر الشجرة. إن التفرعات داخل البيان ترسم جميعها من الأعلى إلى الأسفل في الشجرة بعد التعديل بحيث ترتّب الحروف داخل التفرعات المتعددة حسب الأبجدية. ففي البيان الأصلي تتفرع b إلى c شرقاً و d جنوباً. لذا عند تعديل رسم الشجرة تتفرع b إلى فرعين (يمين ويسار) بحيث تأتي من اليسار إلى اليمين الأحرف بالترتيب c تليها d.

الفصل الثاني
الشجرة المولدة

نقصد بالشجرة المولدة (المنتجة) لبيان متصل بأنها الشجرة التي تتكون من البيان بعد حذف عدد مناسب من الأضلع. بمعنى، لكي نحول بيان إلى شجرة نقوم بشطب بعض أضلعه بحيث يبقى البيان متصلاً ولكن عدد الأضلع أقل من عدد الرؤوس بواحد. الشجرة الناتجة من هذه العملية تدعى بالشجرة المولدة للبيان. طبعاً، توجد طرق عديدة للحذف أشهرها طريقة البحث في العرض وطريقة البحث في الطول. إذا عرّفنا مفهوم طول الشجرة على أنه عدد مستويات الشجرة (عدد الأسطر المستخدمة عند رسمها في الصورة الهندسية المعيارية كجذر تتفرع منه الدوائر، فإنه يمكن القول أن طريقة البحث في العرض تعطي أقصر طول لشجرة منتجة للبيان. بينما تعطي طريقة البحث في الطول أطول شجرة ممكنة من بين الأشجار المولدة المختلفة لنفس البيان.
كمثال بسيط سندرس البيان التالي:



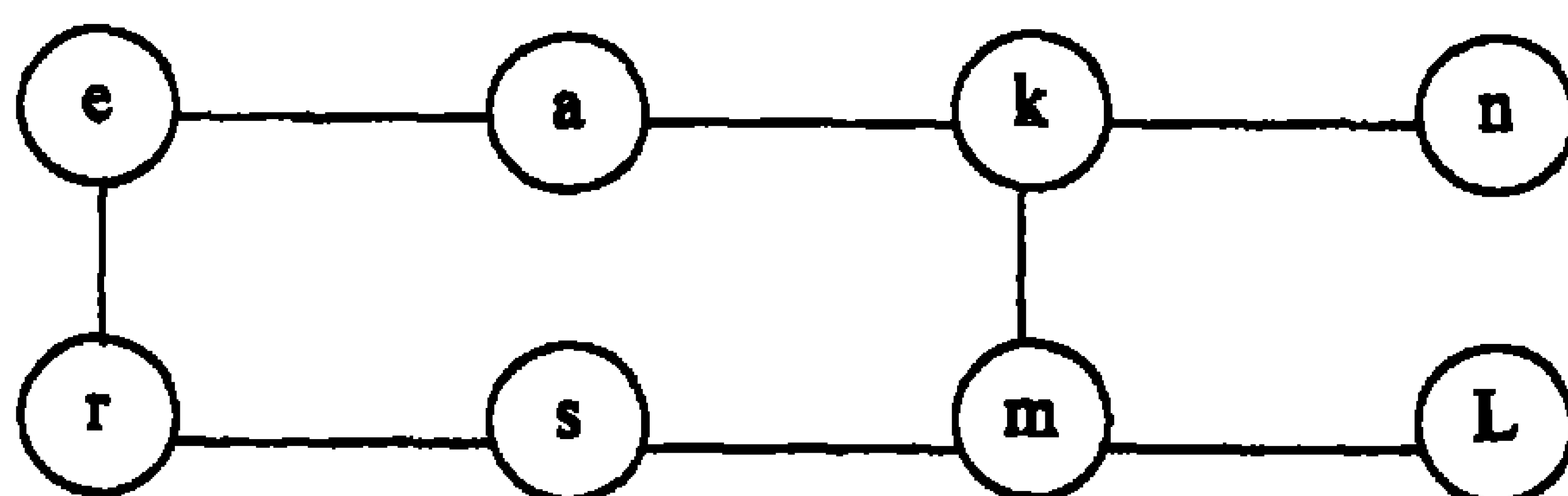
يجب حذف ضلع واحد ليصبح البيان شجرة. توجد أربع إمكانيات للحذف. هذه الإمكانيات تعطي الأشجار التالية:



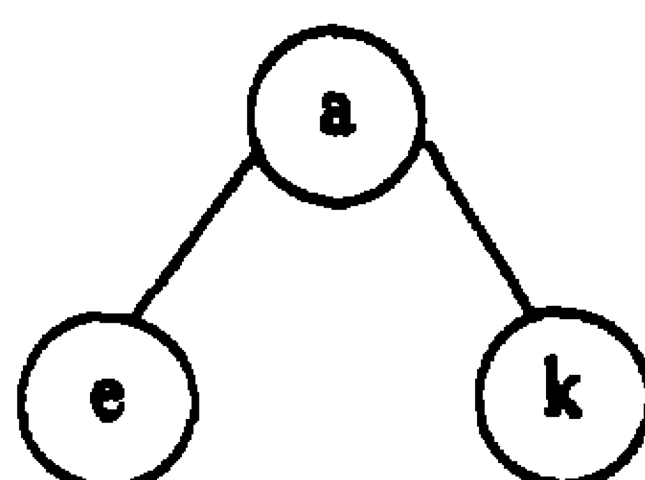
أول شجرة من اليسار هي الشجرة التي تنتجها طريقة البحث في العـــرض. الشـــجرة الثانية من اليسار هي شجرة مكافئة لشجرة العرض. الشجرة الثالثة من اليســـار هـــي الشجرة التي تنتجها طريقة البحث في الطول بينما الشجرة الأخيرة هي شجرة مكافئـــة لشجرة الطول. نلاحظ أن طول شجرة العرض 3 بينما طول شجرة الطول 4 مما يؤكد ما ذكرناه.

سنبدأ بدراسة الطريقة الأسهل وهي طريقة البحث في العرض. فكرة هذه الطريقة تقوم على وضع حرف a كجذر للشجرة. في حال عدم وجود حرف a داخل البيـــان يمكن اختيار أي حرف آخر كما نشاء ليصبح الجذر. ثم ننظر إلى البيان ونبحث عـــن جميع التفرعات من الدائرة التي وضعناها كجذر ونرتبها كتفرعات مـــن الجـــذر إلى الأسفل وحسب الأبجدية من اليسار إلى اليمين. لاحظ أنه في حالة المربع فرعنـــا b و c بالترتيب من الجذر a بسبب ارتباطهم مع دائرة حرف a في البيان. الخطـــوة التاليـــة تكون بإعادة العملية للدوائر التي تحتوي الحروف المتفرعة من الجذر. بمعنى آخر بعـد أن ننتهي من مستوى الجذر ننتقل إلى المستوى الأسفل منه ونسير بالترتيب من اليســـار إلى اليمين ونفرع حسب الارتباطات الموجودة داخل البيان. لكن، يجب مراعاة أن لا يتـــم التفريع إلى حرف ما أكثر من مرة واحدة. ففي حالة المربع السابق نبدأ بحرف b الـــذي سيفرع إلى حرف d. بعد ذلك يأتي دور حرف c الذي لن يجد دوائر جديدة بســـبب

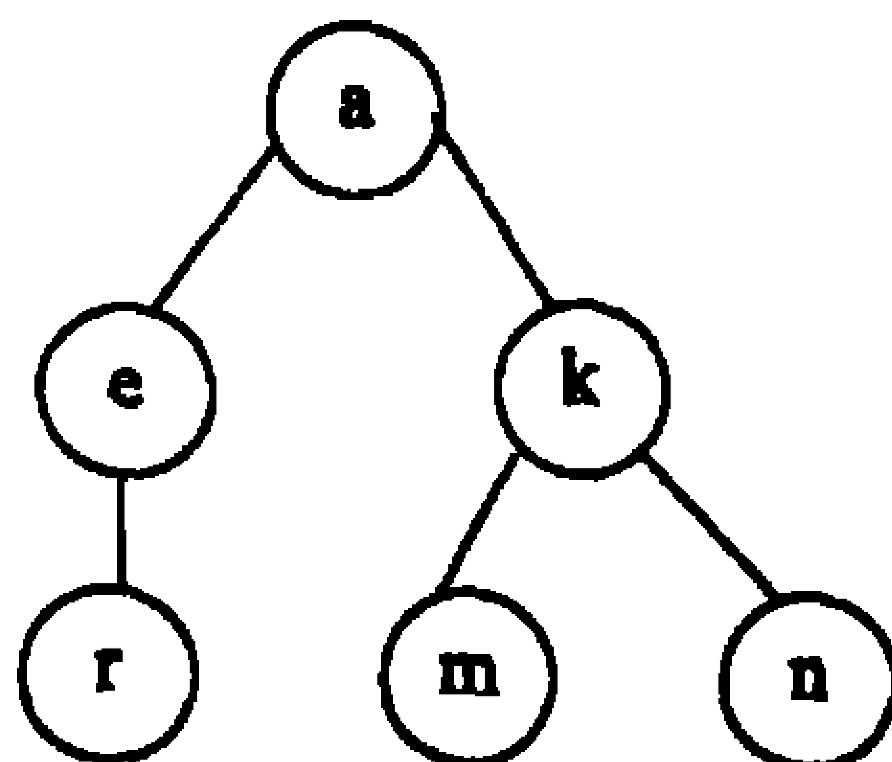
أن b سبق c إلى حرف d. لذا، حرف c لن يفرع ونكون قد كتبنا حـــروف البيـــان الأربعة في الشجرة وانتهت العملية كاملة. لنأخذ المثال التالي:



هذا البيان يمتلك ست أشجار مولدة. شجرة العرض تبدأ كالتالي:

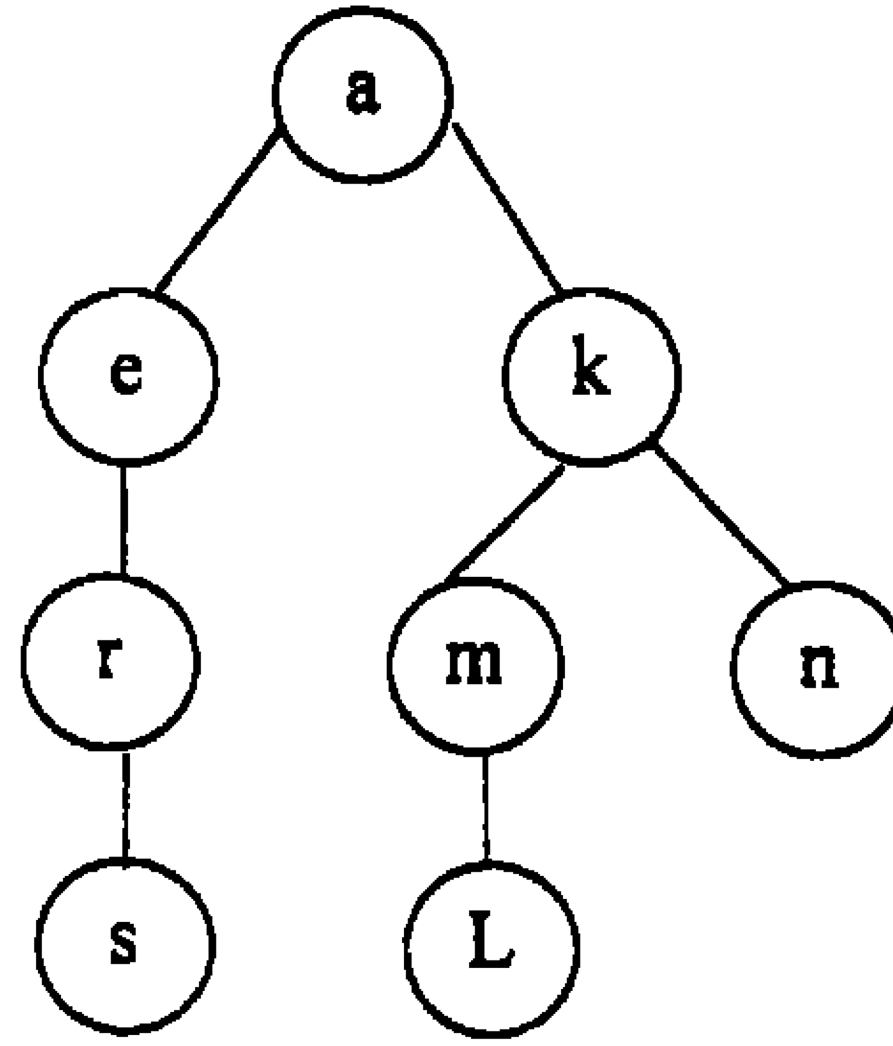


الآن نرى أن e ترتبط مع r و k ترتبط مع m و n. لذا حسب الأبجدية نزيد مستويات الشجرة مستوىً جديداً كالتالي:

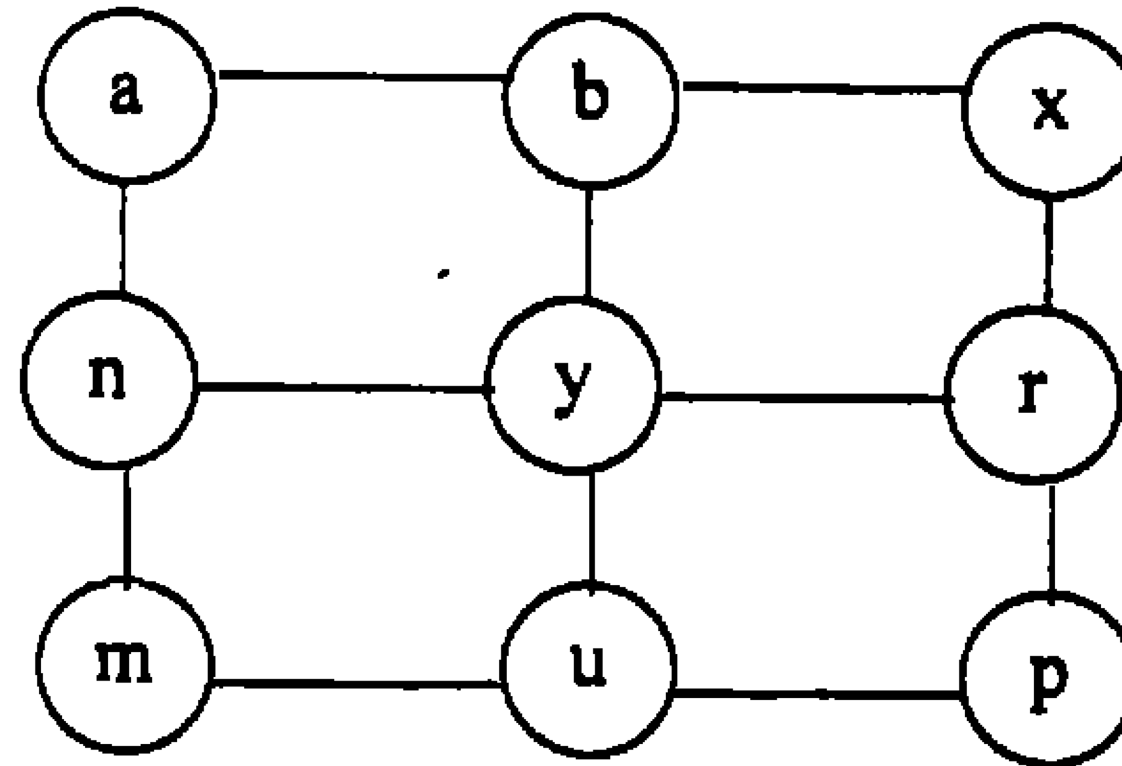


لاحظ أن m و n مرتبان أبجدياً ولكن r سبقهم من اليسار إلى اليمين. هذا يعود إلى أن e أتت قبل k عند التفريع من a بسبب الأبجدية ولذلك اضطررنا للتعامل مع فـــروع e قبل فروع k هذا الوضع يشبه في الحياة العائلية أن يقوم كل أب بتسمية أبنائه حســب الأبجدية تنازلياً. لكن، لا يمكن للشخص أن يجبر أخاه على أن يختار لأبنائه أسماء مرتبــة أبجدياً بعد اسم ابن عمهم. بعد أن انتهينا من مستوى أبناء a يأتي دور أحفـــاد a أي

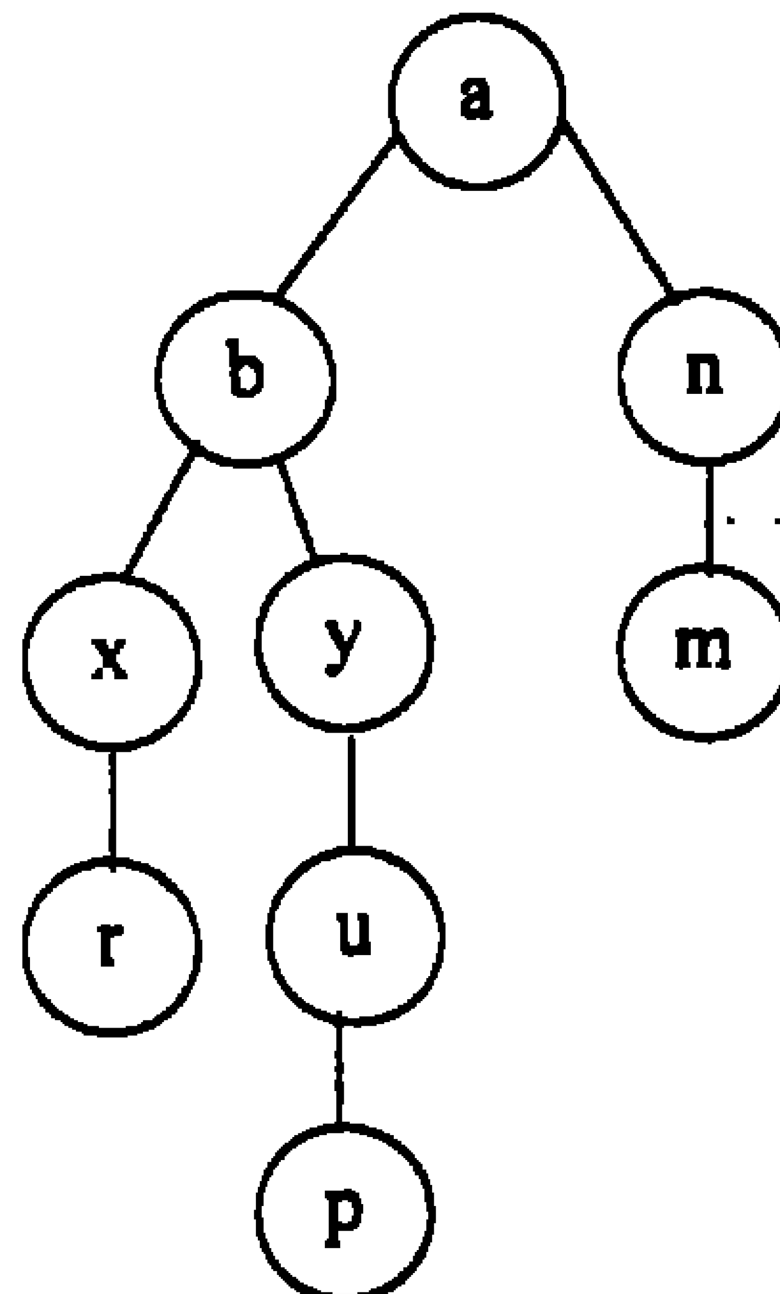
بالترتيب r ثم m ثم r . n سيسبق الجميع إلى حرف s، فلا يبقى أمام m سوى التفريع إلى L. أما n فإنه لن يفرع إلى شيء وبذلك نحصل على الشجرة في الصورة النهائية كالتالي:



مثال: أوجد الشجرة المولدة للبيان التالي بطريقة البحث في العرض:

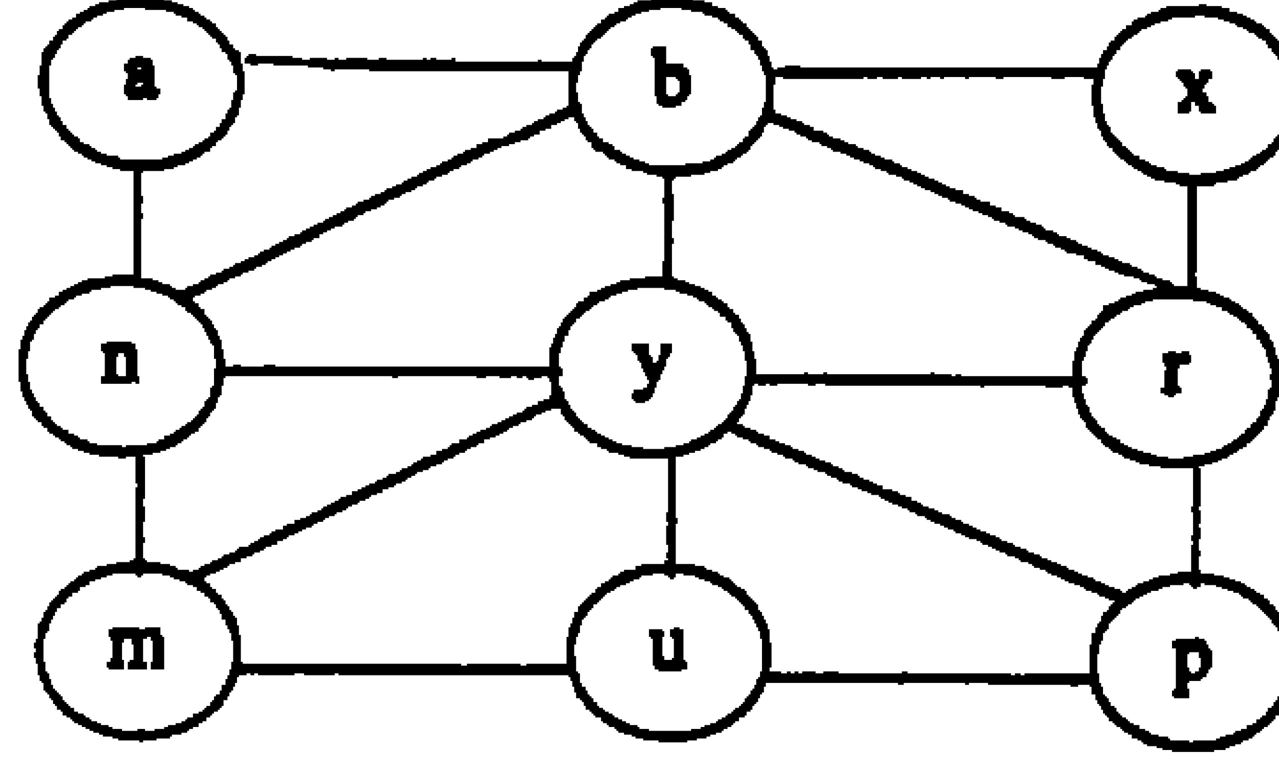


الحل:

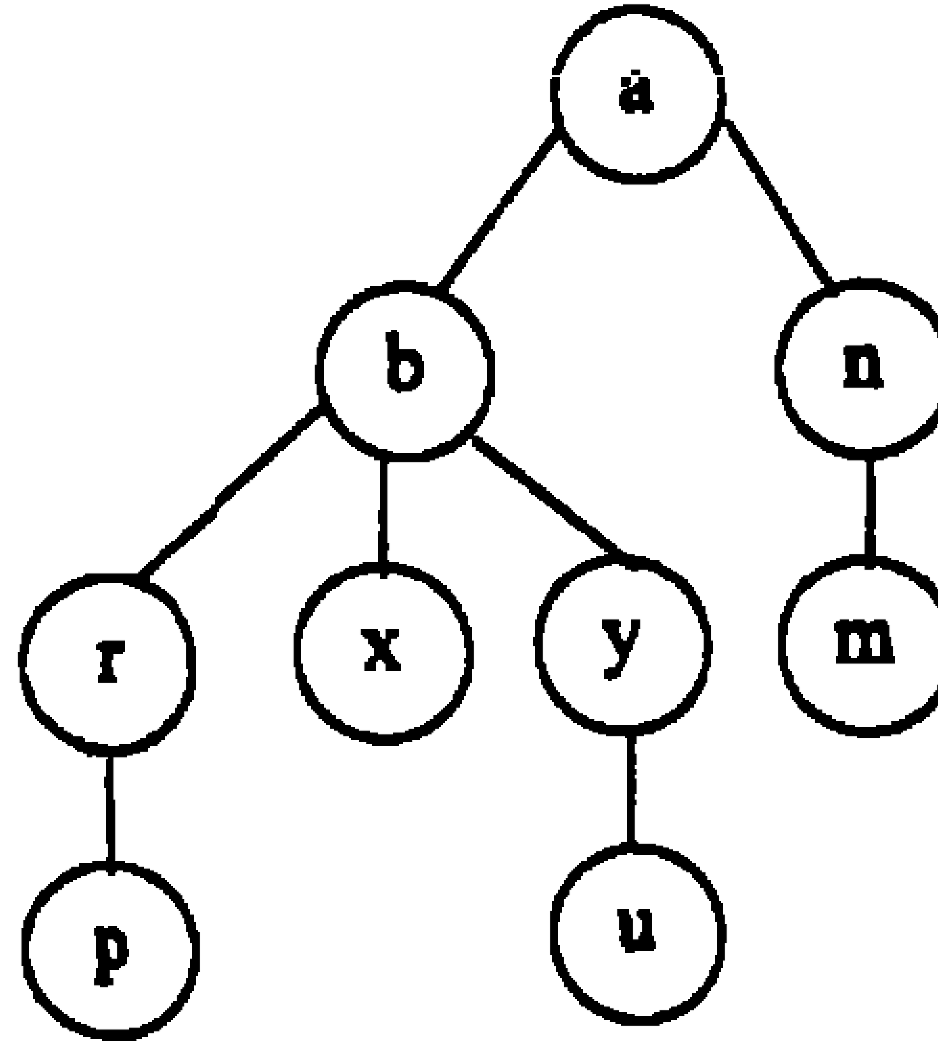


لاحظ أن طول الشجرة هو 5.

مثـــال: أوجد الشجرة المولدة باستخدام البحث في العرض للبيان التالي:

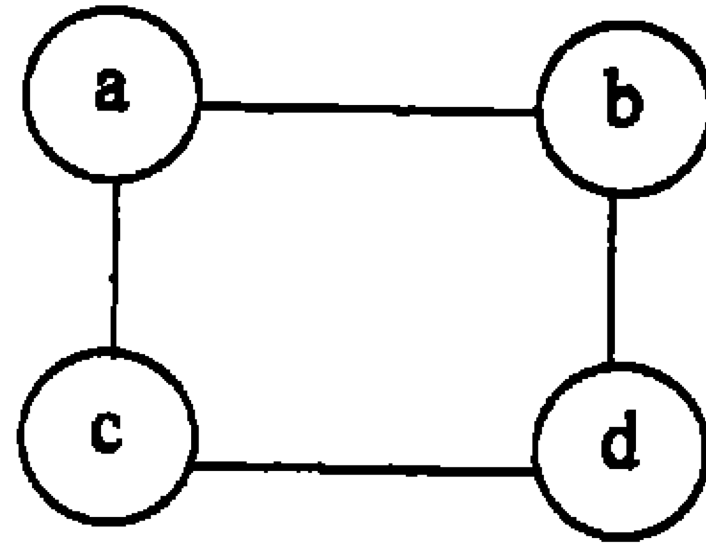


الحل:

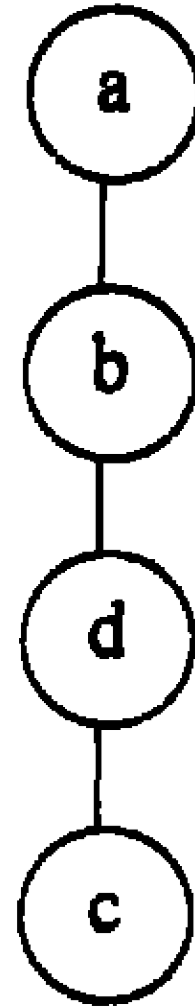


لاحظ أن الشجرة طولها الآن هو 4. إذا عرفنا بأن البيان في المثال الجديد هو البيـــان الذي في المثال السابق مع عدد أكبر من الأضلع، لاكتشفنا بأن زيادة الأضلع للبيـــان عادةً ما يؤدي إلى أن يقصر طول شجرة العرض (تزداد عرضاً).

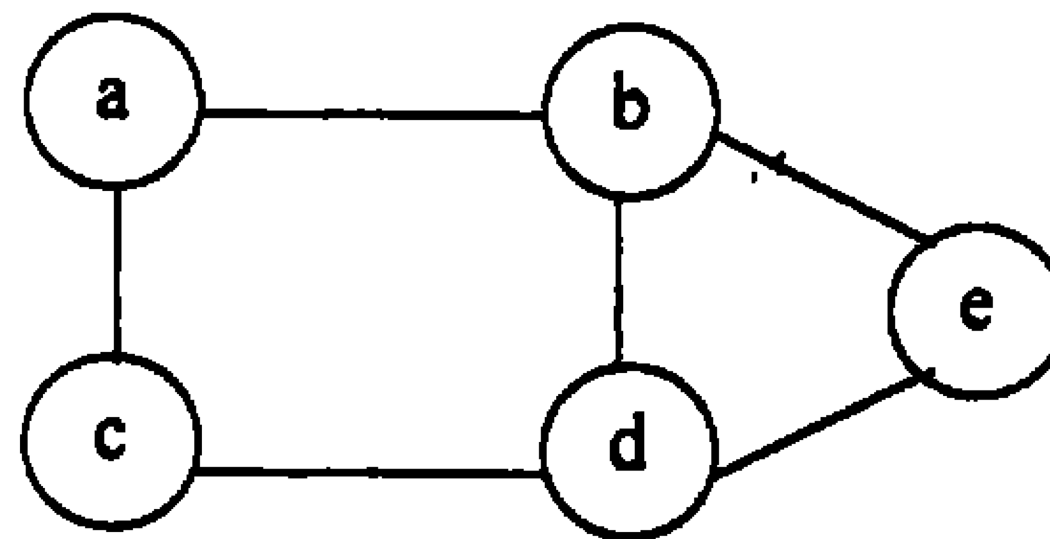
ما سيحدث لشجرة الطول في حال زيادة عدد أضلع البيان هو كما متوقع زيـادة طول الشجرة (تزداد طولاً). لنشرح أولاً طريقة البحث في الطول. بالنسبة للمربع



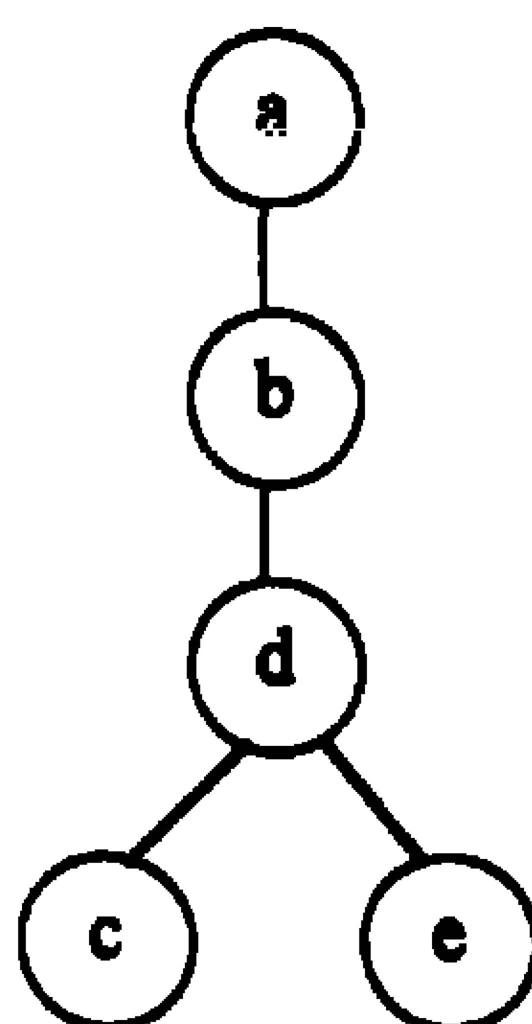
فإن شجرة الطول هي



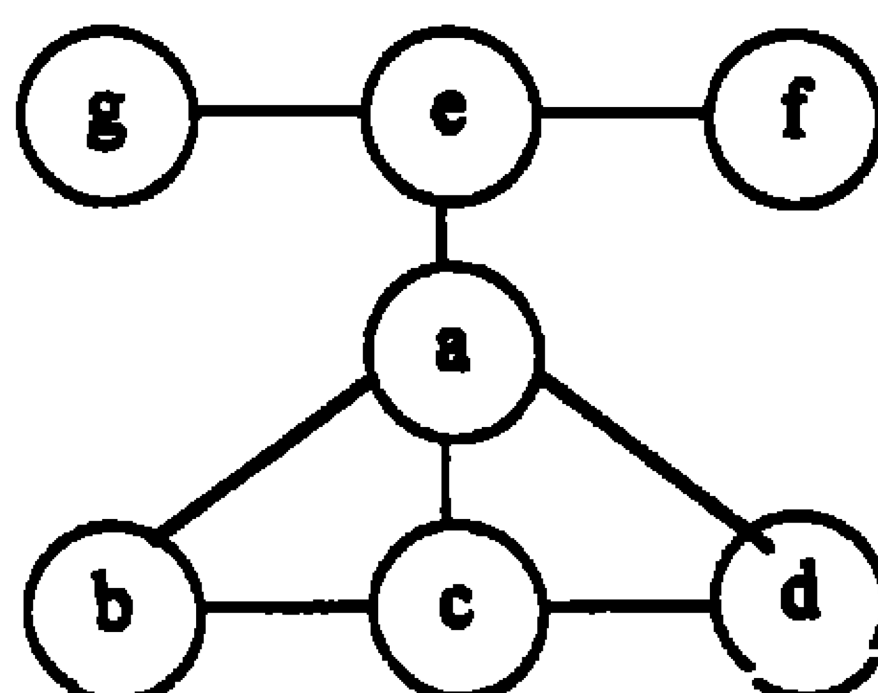
تفسير ذلك أن الجذر يتم اختياره على أنه حرف a كما أسلفنا. ثم ننطلق من الرأس a في مسار طويل داخل البيان. هذا المسار ينتقل من دائرة إلى أخرى ويرسم دوائر الحروف في الشجرة تباعاً من الأعلى إلى الأسفل حسب ورودها في المسار. عند وجود مفترق مسارات داخل إلبيان فإننا نختار الذهاب إلى الحرف الذي له الأولوية حسب الأبجدية وإكمال المسير حتى النهاية. فمثلاً، انطلقنا داخل المربع من a إلى b بدل c بسبب الأبجدية. عندما وصلنا b تابعنا المسير إلى الدائرة d فالدائرة c لو نظرنا إلى البيان التالي:



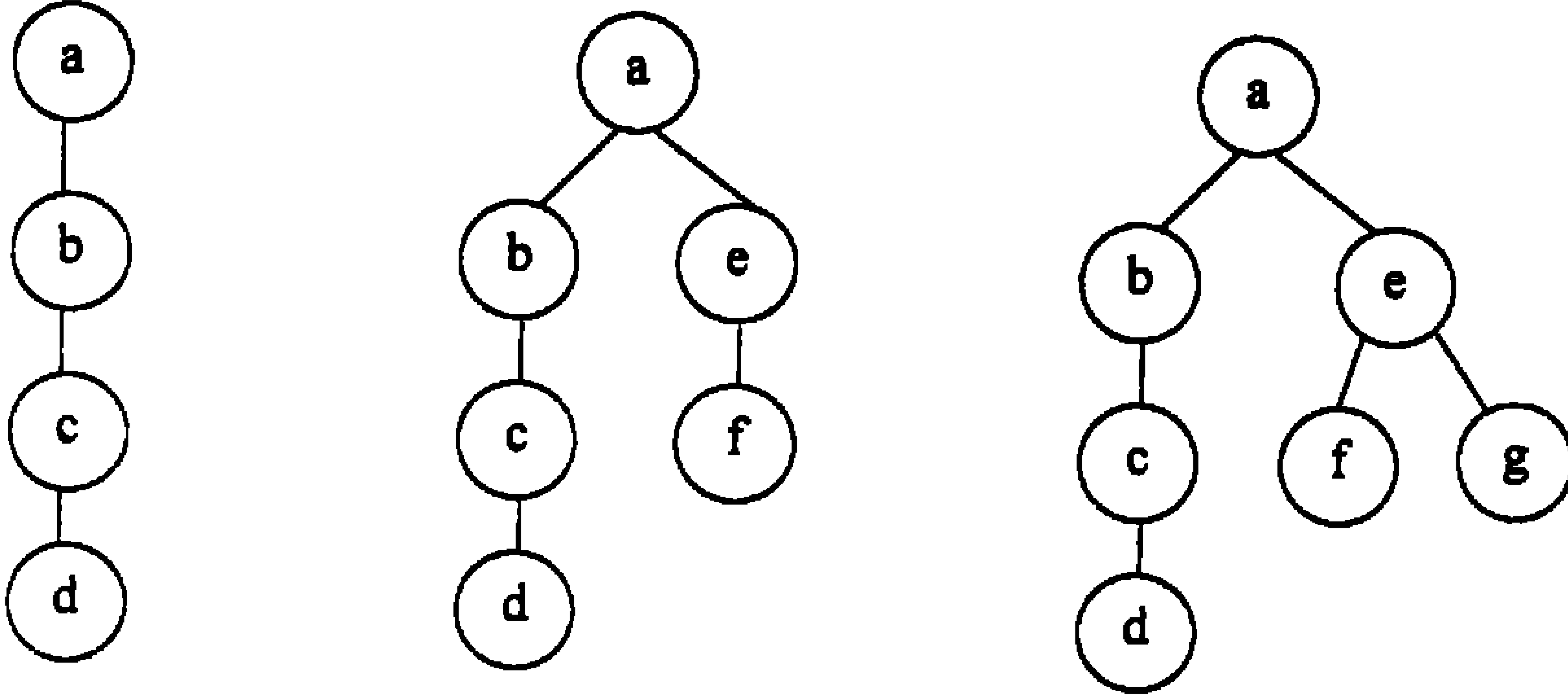
فإن المسير داخل البيان في مراحله الأولى يشبه تماماً ما فعلناه قبل قليل. لكن عند الوصول إلى c لا ينتهي بنا المطاف لأننا نكون لم نأتي على ذكر الرأس e بعد. في حال بقاء بعض الحروف نقوم بالرجوع البطيء إلى الخلف بمعنى نرجع من c كما جئنا خطوة خطوة حتى نعثر على مخرج (طريق) يوصلنا إلى بقية الحروف. عند إيجاد المخرج نسلك مساراً جديداً إلى أن نصل مجدداً إلى نهاية مسدودة. في حال تبقي بعض الحروف نعود مجدداً أدراجنا خطوة خطوة. وهكذا حتى نأتي على كل الحروف. يتم في حال سلوك مسار جديد إضافة تفرع جديد للشجرة من الدائرة التي وجد عندها المخرج أثناء العودة. في حالة البيان الأخير نعود من c إلى d فنجد المخرج. المسار الجديد ينطلق من d إلى e ولذا نفرع الشجرة من الدائرة d إلى فرع جديد e على يمين الفرع القديم c. أي تكون شجرة الطول للبيان الأخير كالتالي:



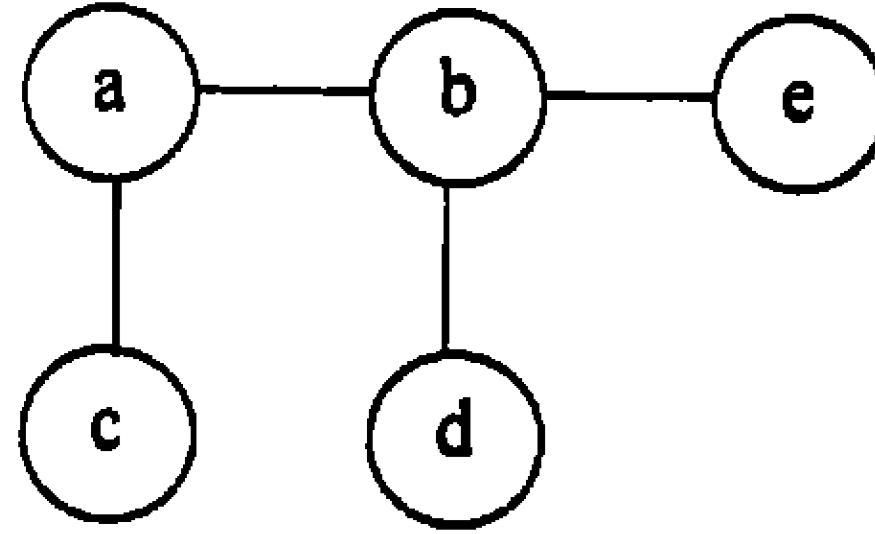
عادة ما نرسم عدة أشجار في طريقة البحث في الطول بحيث تعبر كل شجرة عن سلوك مسار جديد مقارنة مع الشجرة التي سبقتها. مثلا، إيجاد شجرة الطول داخل البيان التالي:



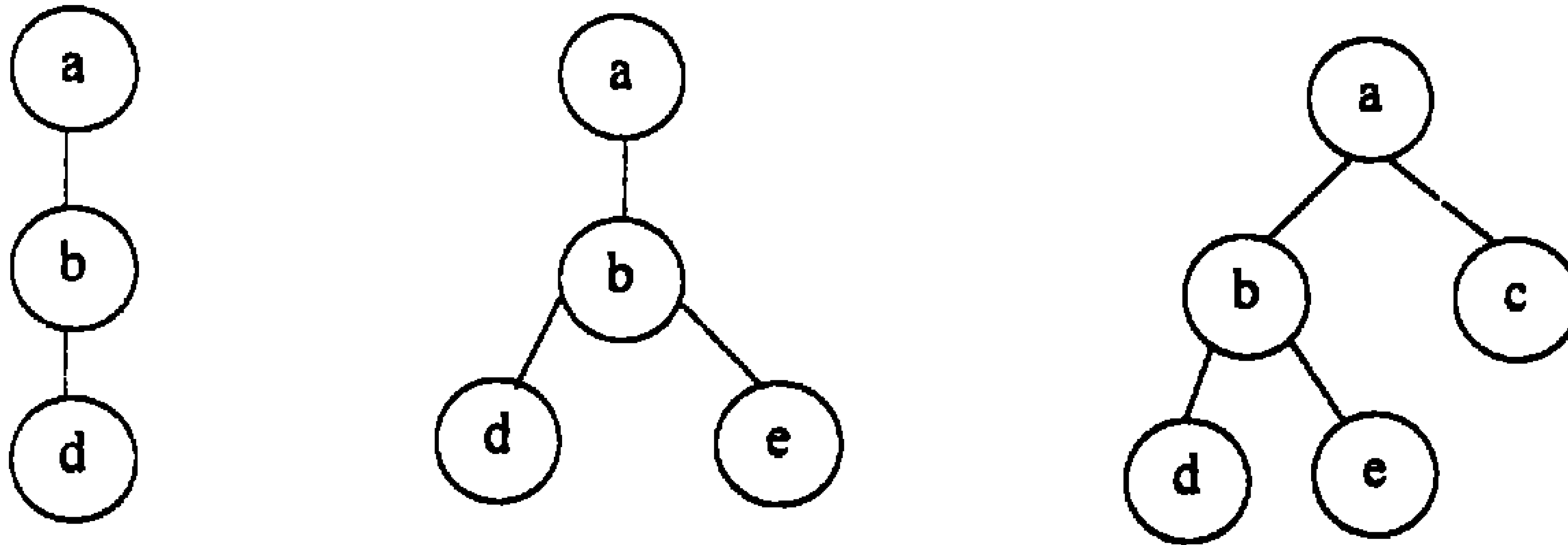
يتم على ثلاث مراحل مرسومة من اليسار إلى اليمين كالتالي:



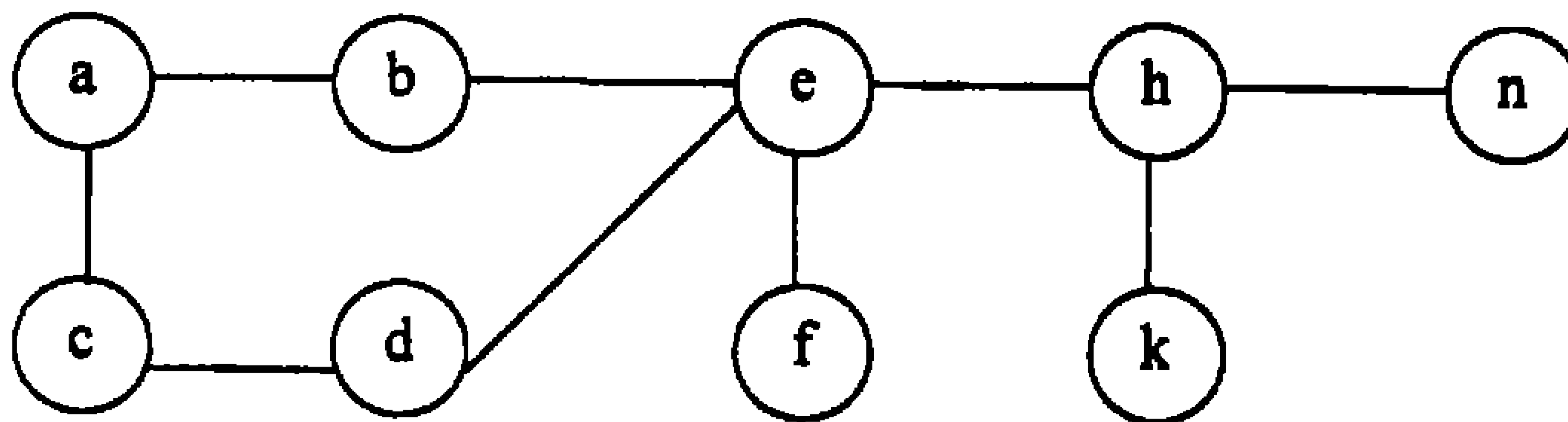
مثـــال: أوجد الشجرة المولدة باستخدام طريقة البحث في الطول للبيان التالي:



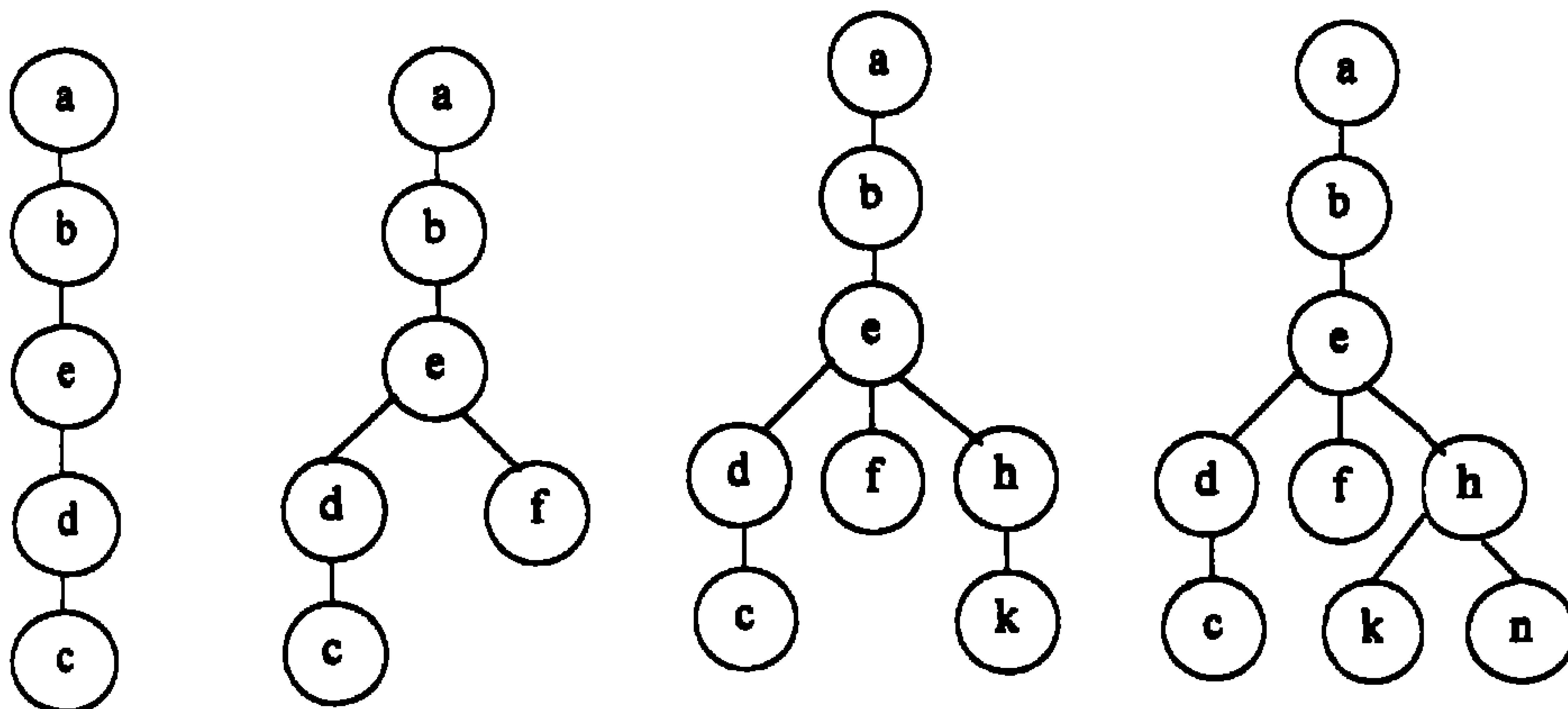
الحـــل: الشجرة الأخيرة هي الجواب النهائي



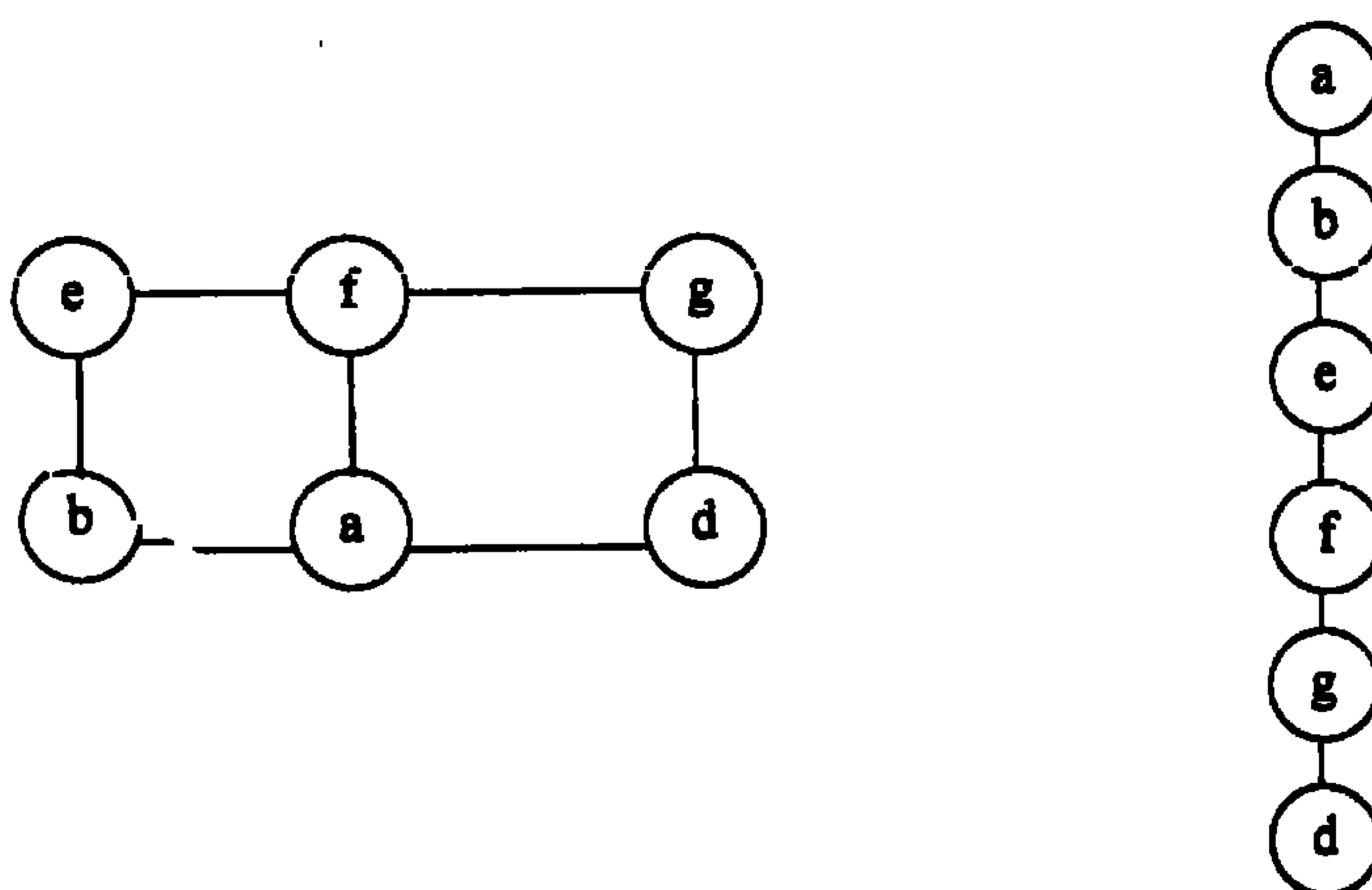
مثـــال: أوجد الشجرة المولدة باستخدام طريقة البحث في الطول للبيان



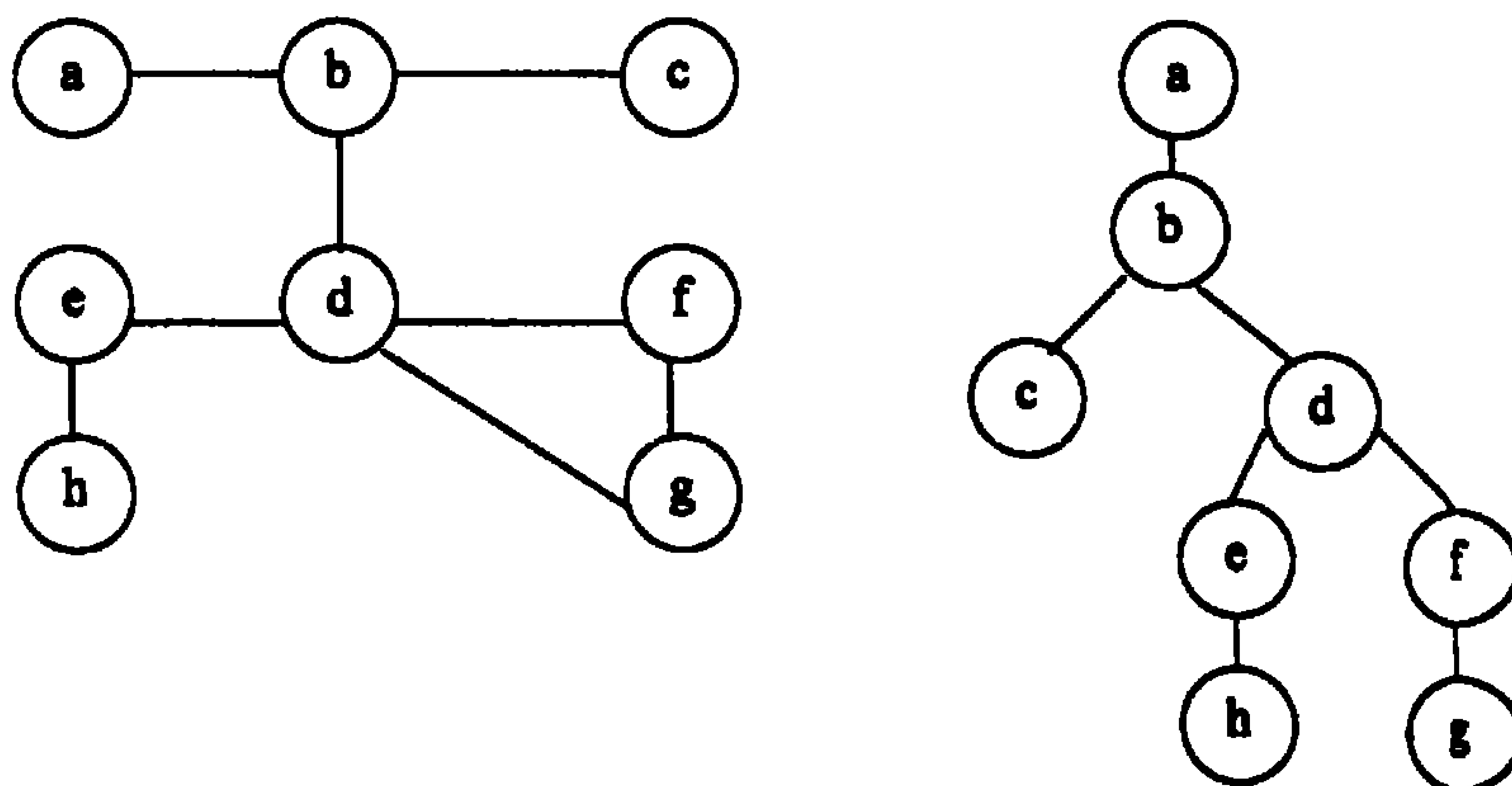
الحـــل:



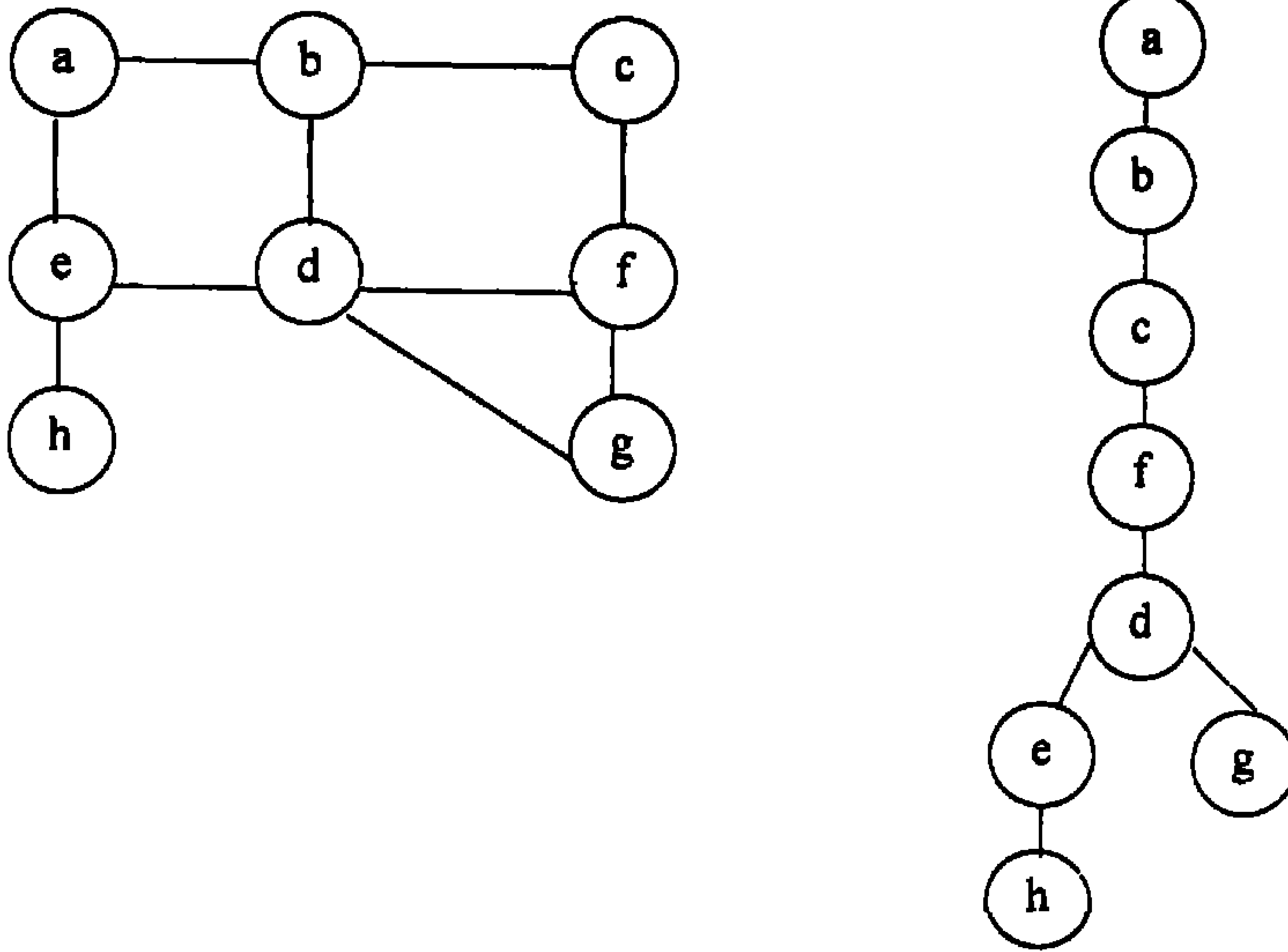
مثـــال: البيان وشجرة الطول التابعة له هما



مثـــال: البيان وشجرة الطول التابعة له هما



مثـــال: البيان وشجرة الطول التابعة له هما

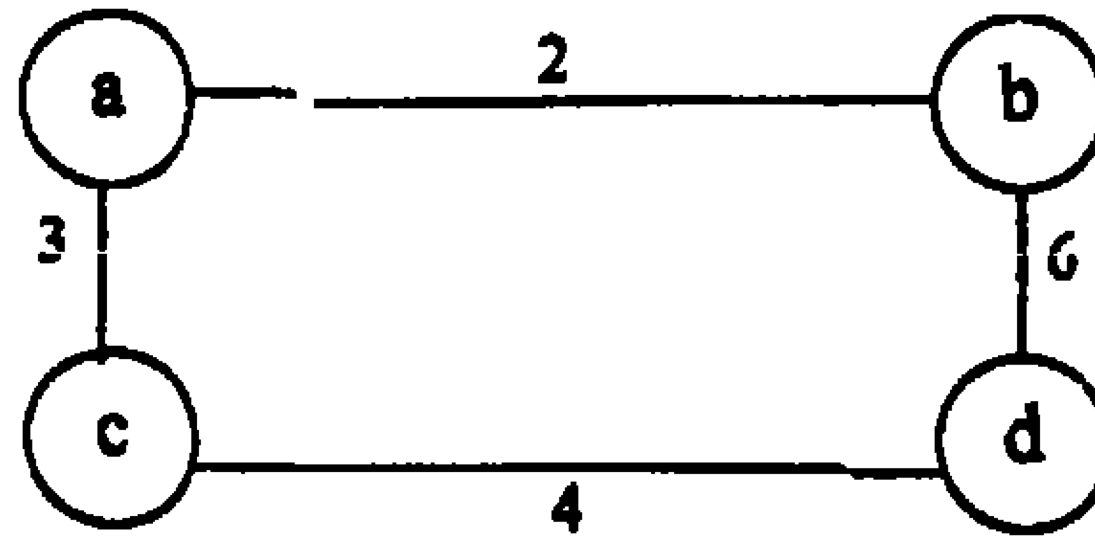


لاحظ أن هذا البيان هو عبارة عن البيان الذي قبله مضاف إليه بعض الأضلع. هـــذه الإضافة تسببت في ازدياد طول الشجرة.

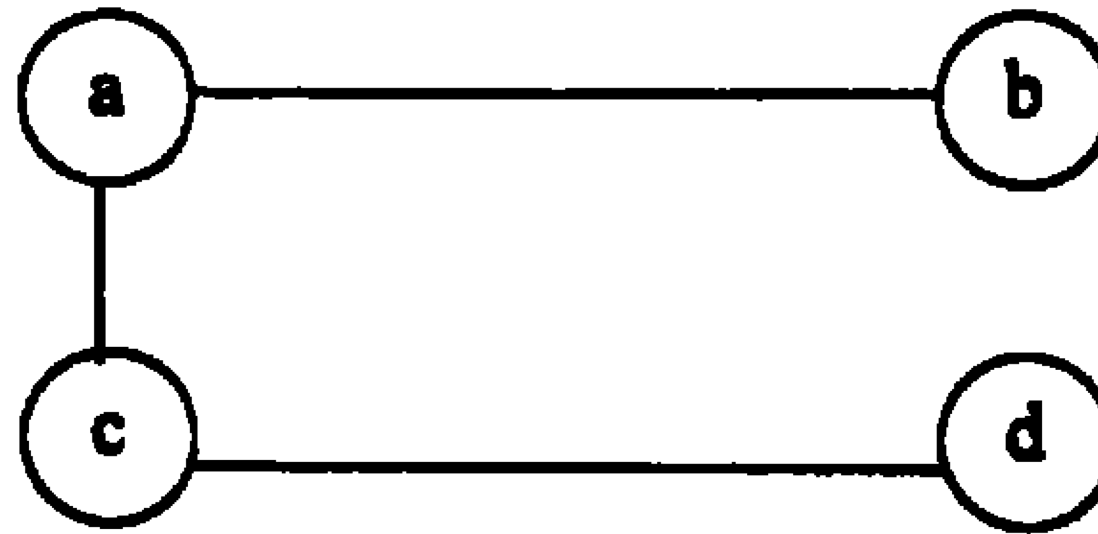
الفصل الثالث

الشجرة المولدة الصغرى

إذا كان لدينا بياناً مكتوب فوق أضلاعه أرقام تشير إلى طول كل ضلع، فإننـــــا نرغب في تحديد شجرة مولدة من بين جميع الأشجار المولدة للبيان بحيث يكون مجموع الأرقام فوق الأضلع المستخدمة في الشجرة المولدة أصغر شيء ممكن. مثلاً، لو نظرنـــا إلى البيان المرقّم التالي:



نحن نعرف أنه توجد 4 شجرات مولدة لهذا الشكل. لكن، الآن ســـنختار الشــجرة التالية

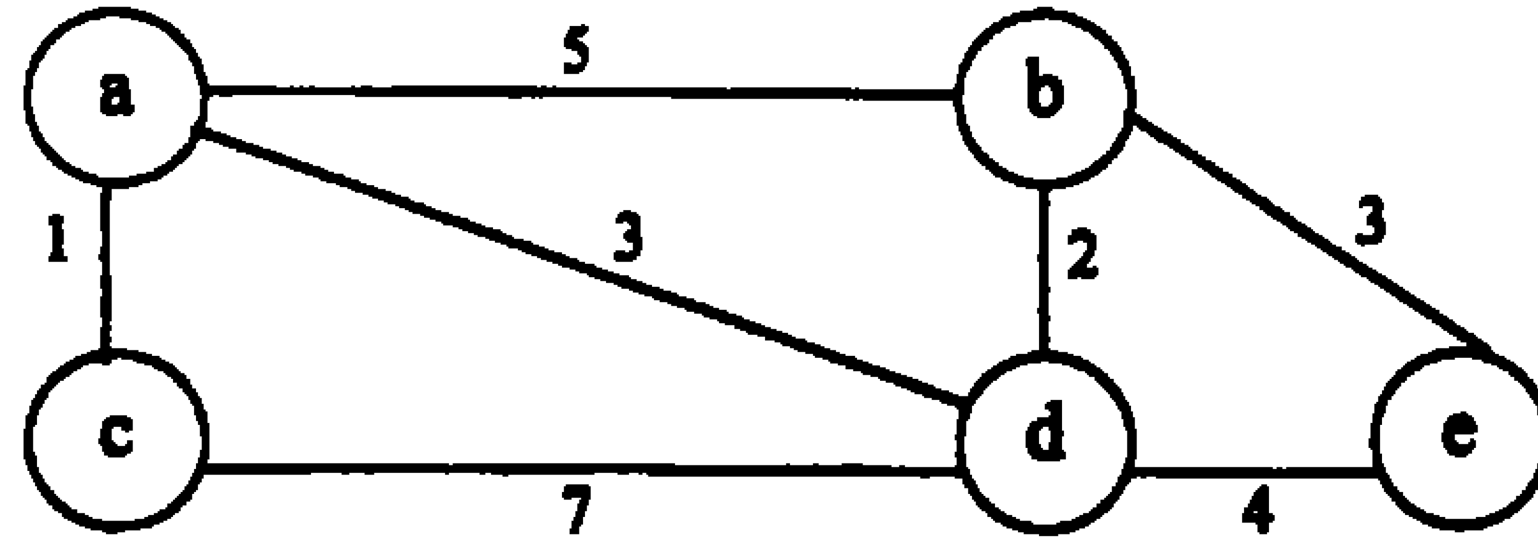


لكي تكون الشجرة المولدة الصغرى. السبب أن مجموع الأرقام فــوق أضلــع هــذه الشجرة هو 9 بينما مجموع الأرقام للأشجار الأخرى هــو 11 أو 12 أو 13. طبعــاً، كانت المسألة هنا سهلة بسبب معرفتنا الأشجار المولدة جميعها. يمكن بسهولة ملاحظـة أنه تم حذف الضلع الذي يحمل أكبر رقم لكي نحصل على الشجرة المولدة الصغــرى.

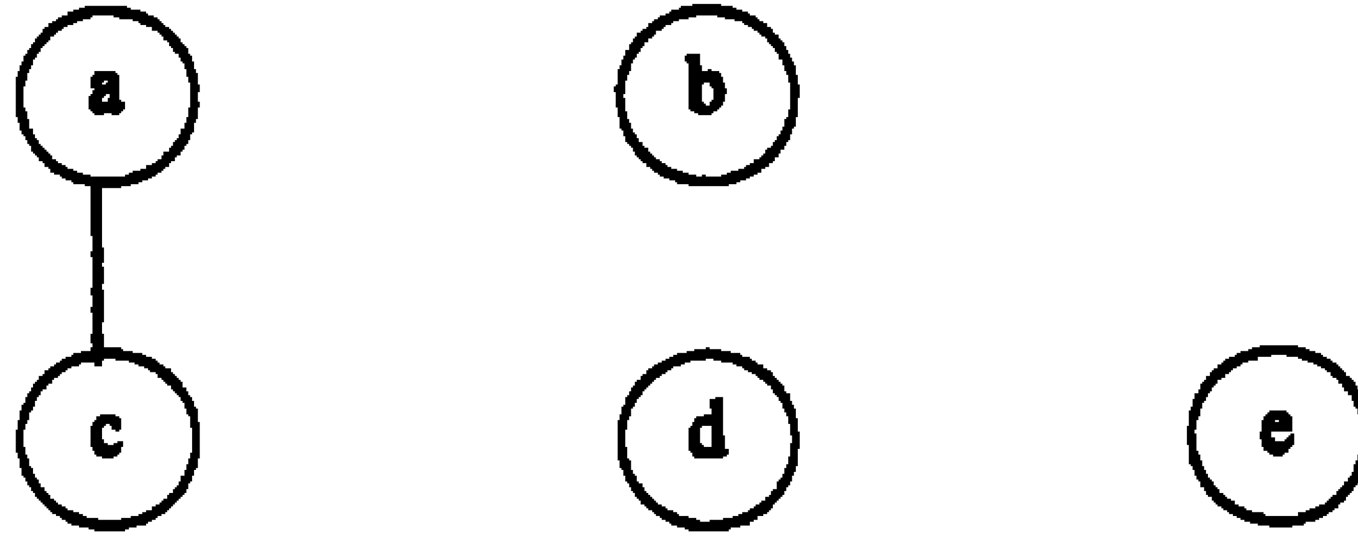
قد لا يكون هذا المبدأ صحيحا في جميع الأحوال، أي إننا لا نقوم بحذف الأضلع التي تحمل أكبر الأرقام للحصول على الشجرة المولدة الصغرى. تذكر بأن البيان المتصل يتم تحويله إلى شجرة من خلال حذف بعض الأضلع بحيث يكون عدد الأضلع المتبقية أقل من عدد الرؤوس بواحد مع الحفاظ في الوقت نفسه على اتصال الشكل. فلو كان لدينا ضلع يحمل أكبر رقم في البيان وحذفه سيؤدي إلى انفصال الشكل إلى نصفين، فإننا لن نحذف هذا الضلع أثناء عملية حساب الشجرة المولدة الصغرى. سنعرض في هذا الفصل طريقتين لإيجاد الشجرة المولدة الصغرى. سنرى بعد تطبيق الطريقتين أن الأضلع التي تحذف هي عادة الأضلع ذات الأرقام الكبيرة، لكن مع مراعاة الإبقاء على اتصال الشكل. كما سنلاحظ أن الأشكال المغلقة داخل البيان سيتم فتحها وهذا يعود إلى تعريف الشجرة حيث أن الشجرة بيان له خاصية عدم احتواء لفات بسيطة. ففي مثال المربع السابق الذي كان مربعا مغلقا، أصبح البيان مربعا مفتوحا بعد التحويل إلى شجرة مولدة صغرى.

سنبدأ بشرح الطريقة الأيسر للتحويل إلى شجرة مولدة صغرى وهي تطبق عادة على البيانات التي يكون فيها عدد الرؤوس قليلا. تعتبر هذه الطريقة طريقة شاملة بمعنى أنها تتعامل مع جميع أضلع البيان في آن واحد. اسم هذه الطريقة هو خوارزمية كروسكال (نسبة إلى مخترعها). لو أردنا تطبيق هذه الطريقة على المربع السابق فإننا نبدأ برسم الرؤوس جميعا دون أضلع ثم نضيف ضلعا ضلعا حتى يصبح عددها أقل من عدد الرؤوس بواحد. يجب مراعاة إضافة الأضلع ابتداءا من الأضلع التي تحمل أصغر الأعداد وانتهاءا بالأضلع ذات الأرقام الكبيرة. أثناء ذلك يجب الانتباه إلى عدم تكوين أي شكل هندسي مغلق داخل البيان الذي يمثل الشجرة. بمعنى آخر البيان الذي يتم رسمه ليصبح شجرة لا يفترض أن يحتوي على أية لفة بسيطة أثناء الإنشاء. لو بدأنا عمليا بإضافة أضلع المربع السابق لبدأنا بالضلع بين a و b لأنه صاحب أصغر رقم، يليه الضلع بين a و c. يبقى علينا إضافة ضلع ثالث وهو بالتأكيد الضلع بين c و d

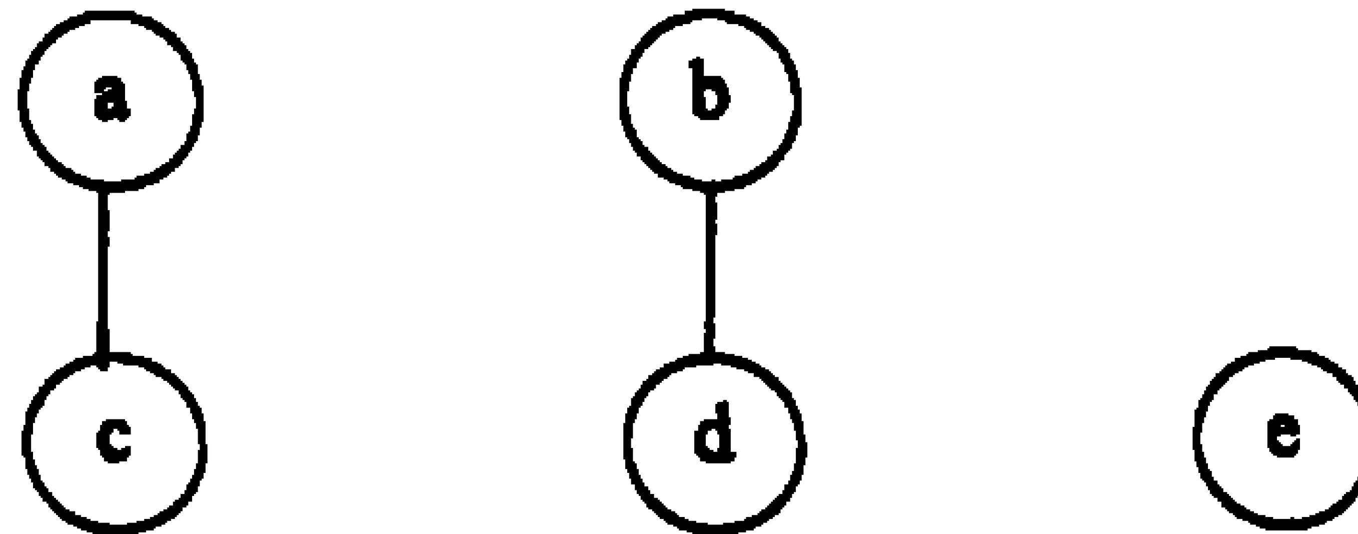
لأنه يحمل رقماً أقل من رقم الضلع الآخر بين b و d. نحصل بهذه الطريقة على الجواب المعروف. كمثال آخر سندرس البيان التالي:



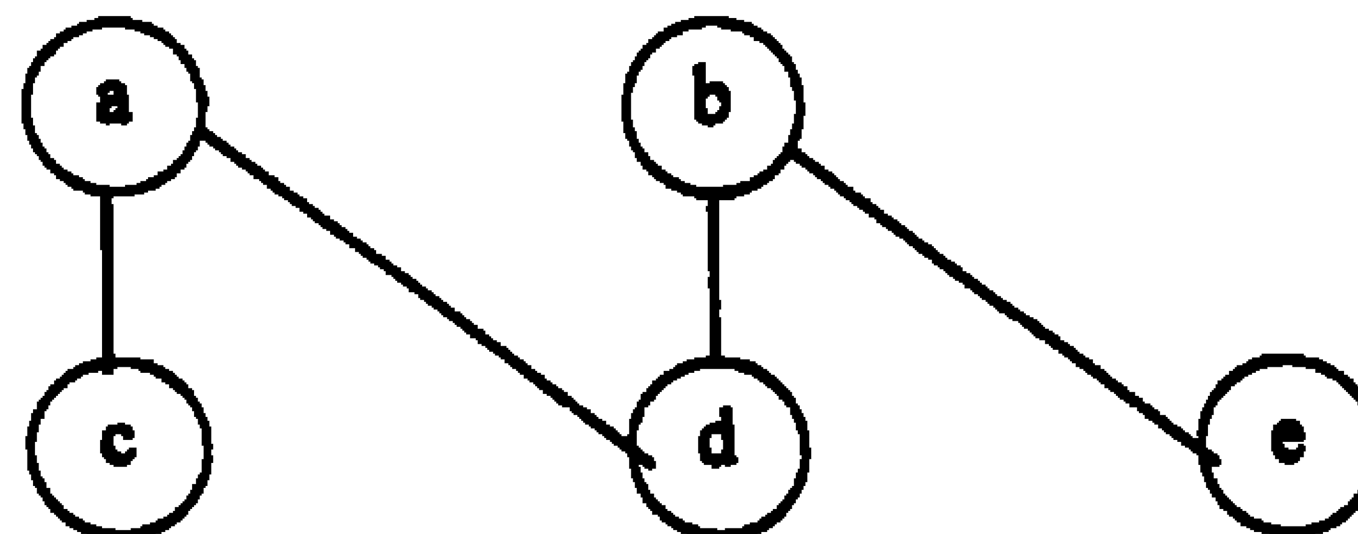
أول ضلع سيضاف هو الضلع بين a و c، أي الخطوة الأولى تعطي الشكل



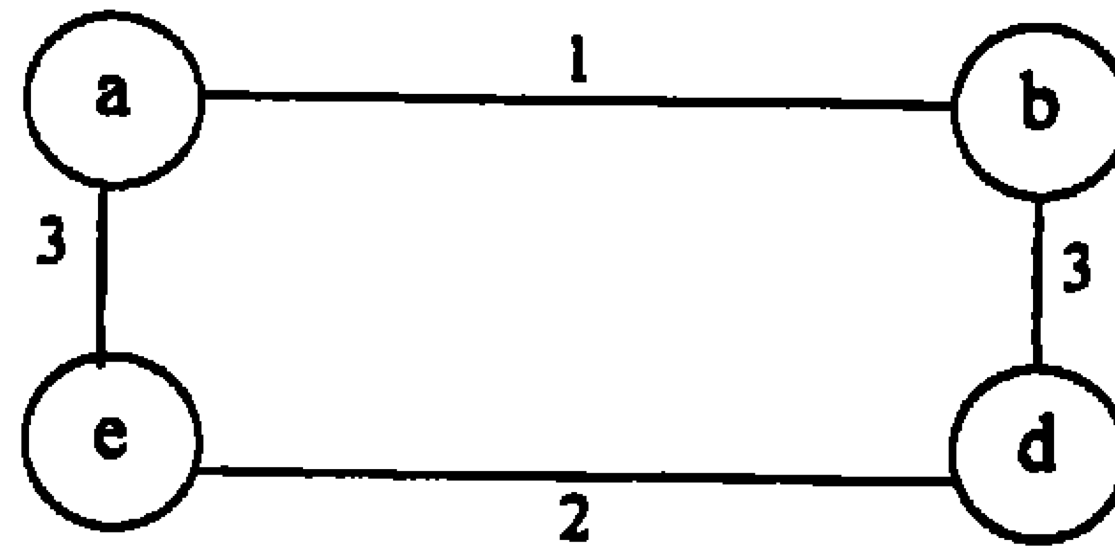
نختار من بين الأضلع المتبقية ضلعاً ثانياً يكون صاحب أصغر رقم من بين الأضلع المتبقية. إذاً، يقع الاختيار على الضلع بين b و d ونحصل على الشكل الجديد



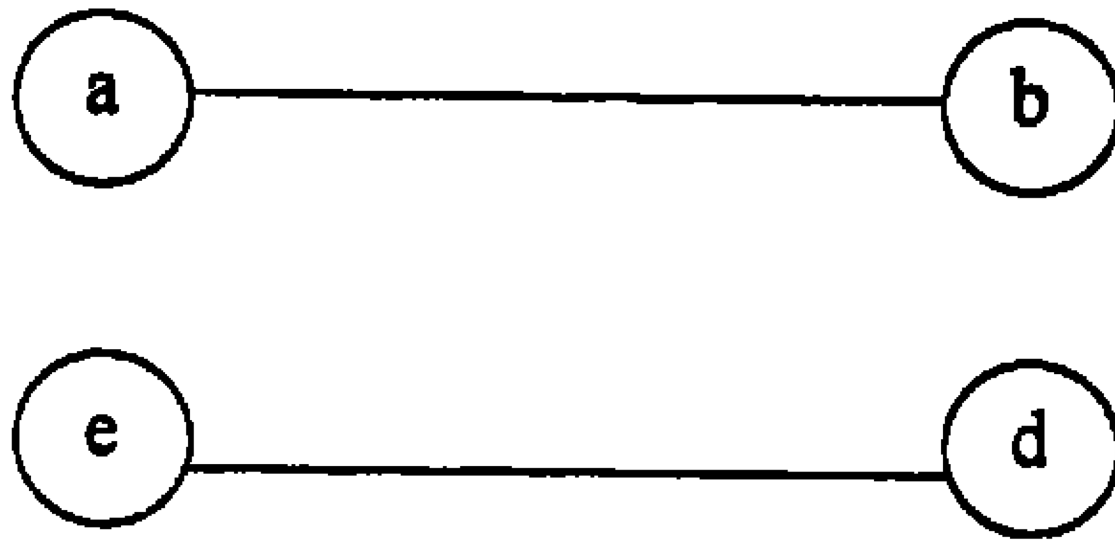
إذا ما تابعنا المسير على هذا الموال حتى يصبح عدد الأضلع المضافة أربعة ينتج الشكل



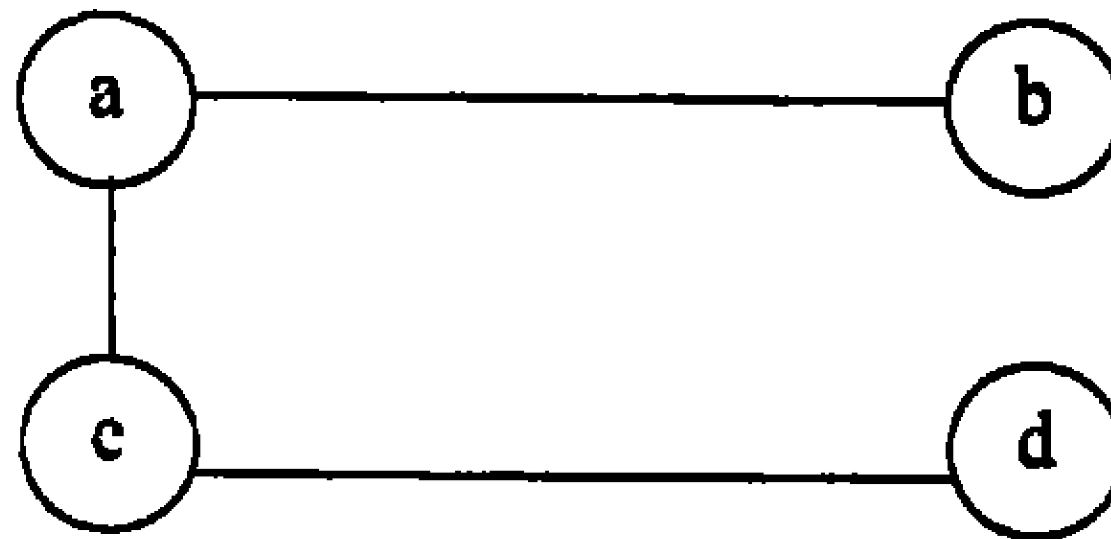
لاحظ أنه هنا فعلاً تم حذف جميع الأضلع الطويلة (الطول حسب الرقم فوق الضلع) وتم فتح المثلثات الثلاثة داخل البيان الأصلي. لو نظرنا إلى البيان التالي:



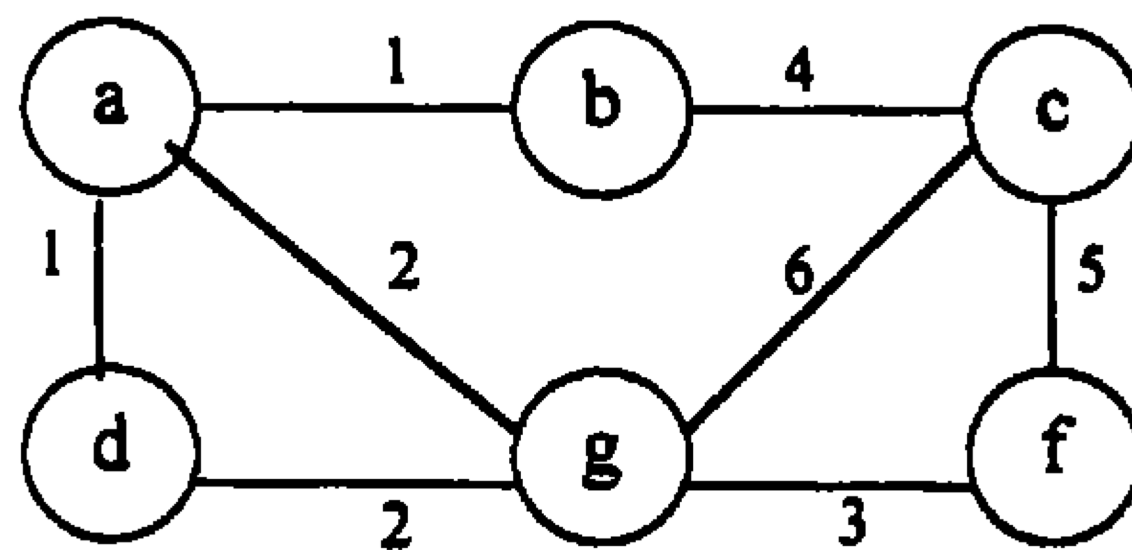
فإن إضافة أول ضلعين توصلنا إلى الشكل



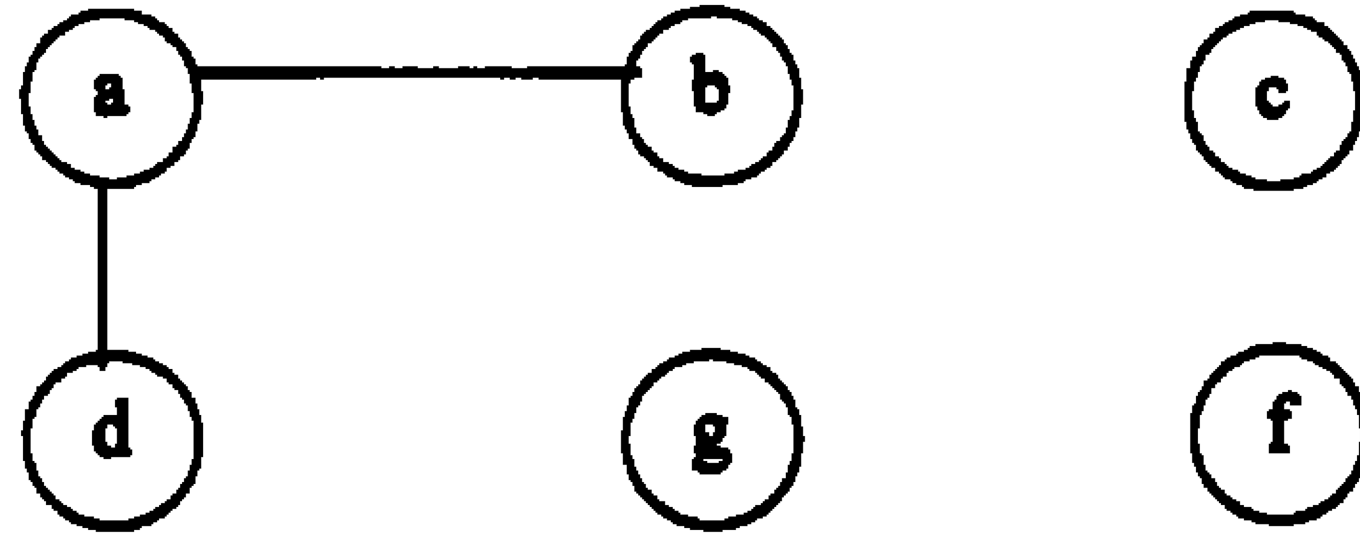
يجب الآن اختيار ضلع من بين ضلعين يحملان نفس الرقم للإضافة. هنا نحتكم للأبجدية فنختار الضلع بين a و e ونحصل على الشكل



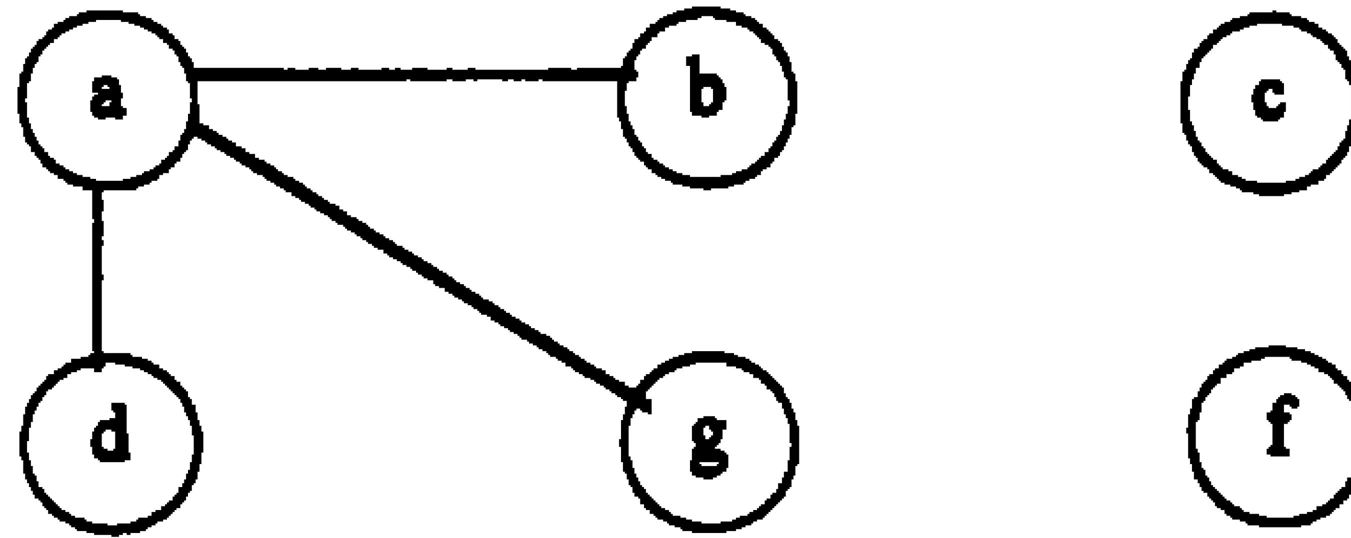
مثال: أوجد باستخدام خوارزمية كروسكال الشجرة المولدة الصغرى للبيان التالي:



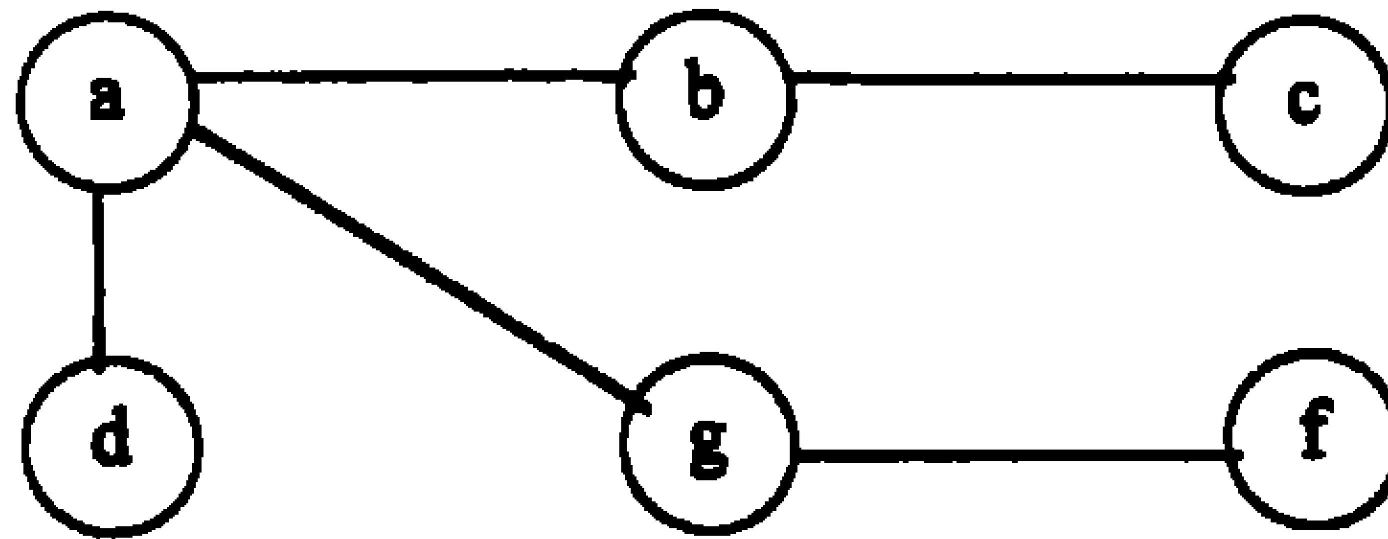
الحل: أول خطوة تكون إضافة ضلعي العدد 1، أي رسم الشكل التالي:



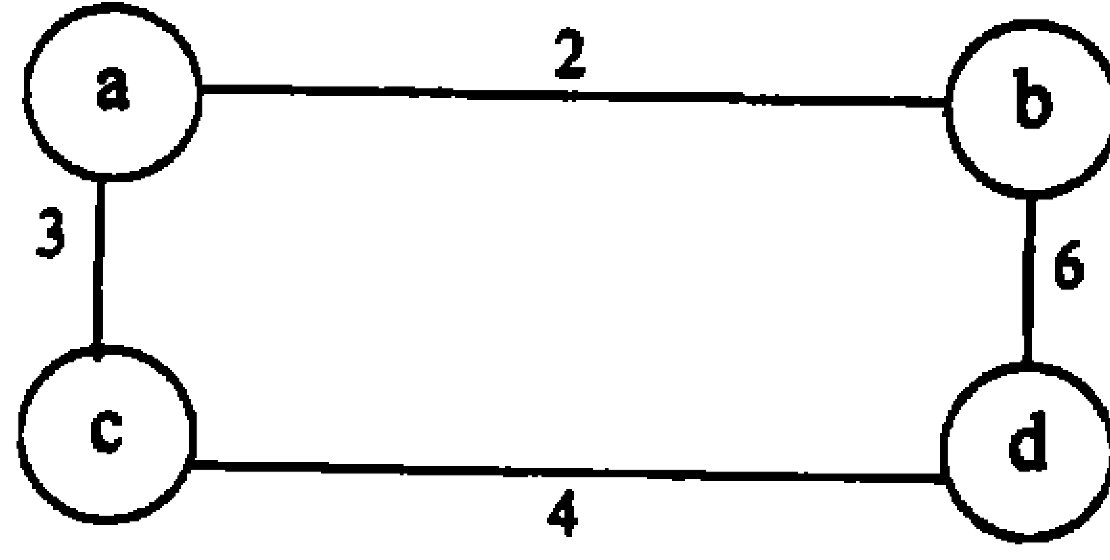
يفترض في الخطوة الثانية دراسة إمكانية إضافة ضلعي العدد 2 . لكن، هنا تبرز مشكلة أن إضافة الضلعين معاً سيؤدي إلى تشكل مثلث مغلق بين a و g و d. لـــــذا، نختـــار حسب الأبجدية ضلع a مع g ونهمل الضلع الآخر إلى نهاية الحل. بالتالي ينتج الشـــكل التالي:



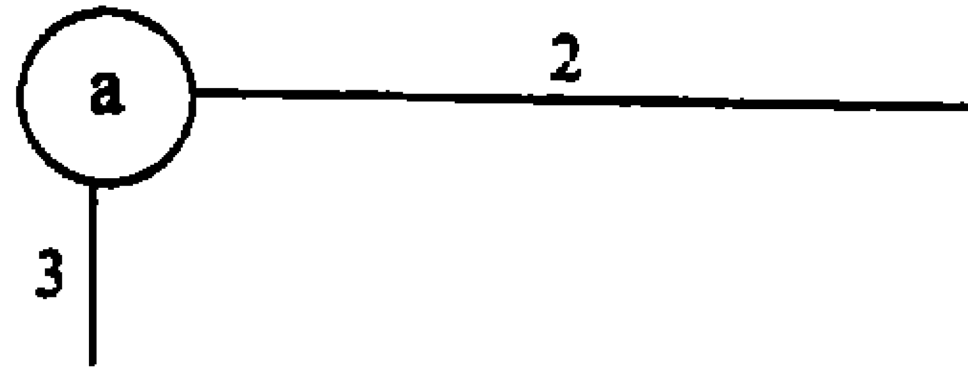
من بين الأضلع الأربعة المتبقية نختار ضلعين دون مشاكل وينتج الجواب النهائي:



الطريقة الثانية لحساب الشجرة المولدة الصغرى تدعى خوارزمية بــــرايم. هـــذه الطريقة بعكس طريقة كروسكال تعتبر طريقة محلية، أي تنظر في كـــل مرحلـــة مـــن مراحل العمل إلى الأضلع المتفرعة من بعض الرؤوس فقط. ما سنفعله في طريقة بـــرايم هو البدء بالرأس a ثم إضافة رأس جديد في كل مرحلة من مراحل العمل إلى الشـــكل. سيتم شبك كل رأس جديد مع الرؤوس القديمة (الموجودة أصلاً) من خلال ضلع مميز. الضلع المميز يتم اختياره من بين مجموعة أضلاع بسبب كونه يحمل أصغر رقم مـــدون فوقه. لو أخذنا مثلاً البيان التالي:



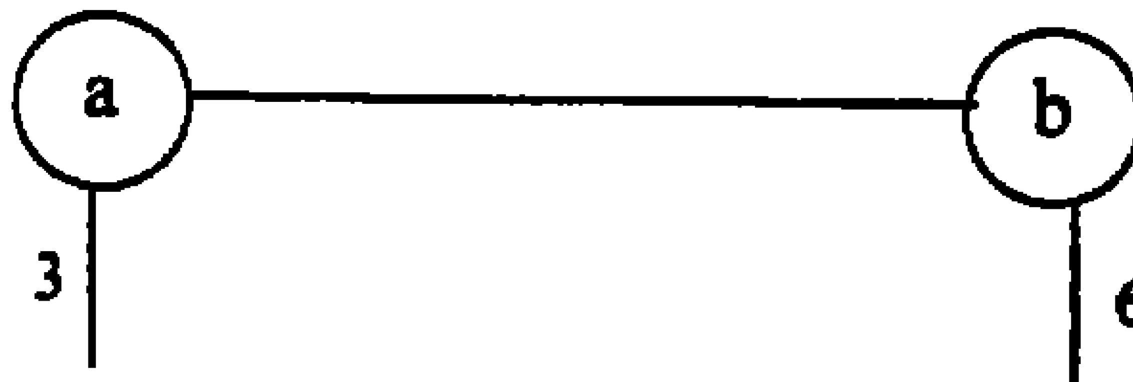
نبدأ بالشكل المكون من الرأس a وجميع الأضلع الصادرة منه مع أطوالها أي



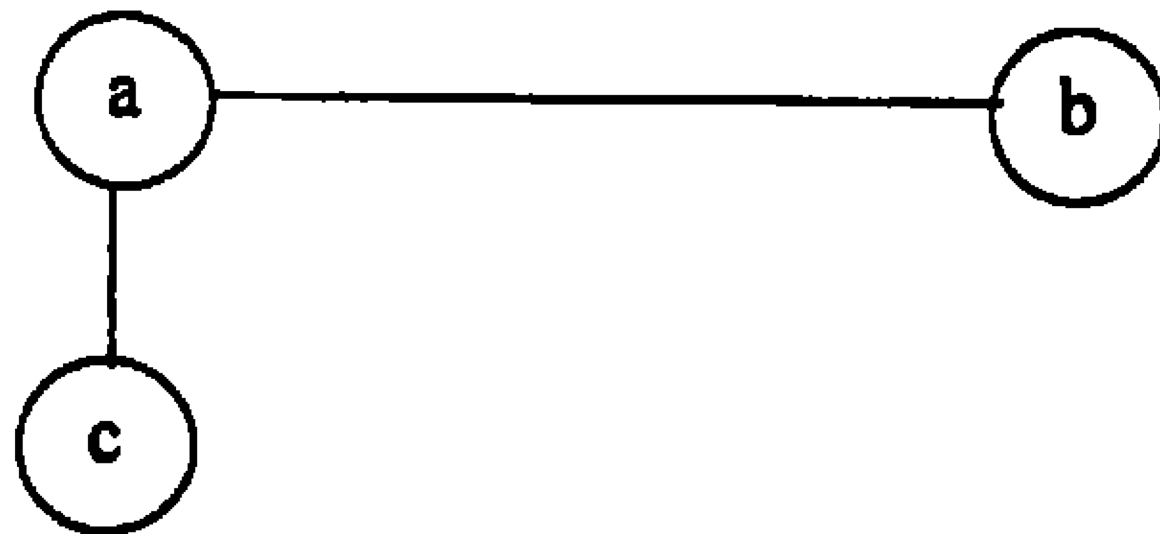
يتحتم علينا الاختيار بين ضلعين أحدهما طوله 2 والآخر 3. طالما أننا نرغب في إيجاد شجرة مولدة صغرى نختار الضلع ذا الطول الأقصر، أي الضلع بين a و b. لذا، ينضم الرأس b إلى الرأس a من خلال هذا الضلع ويصبح الشكل كالتالي:



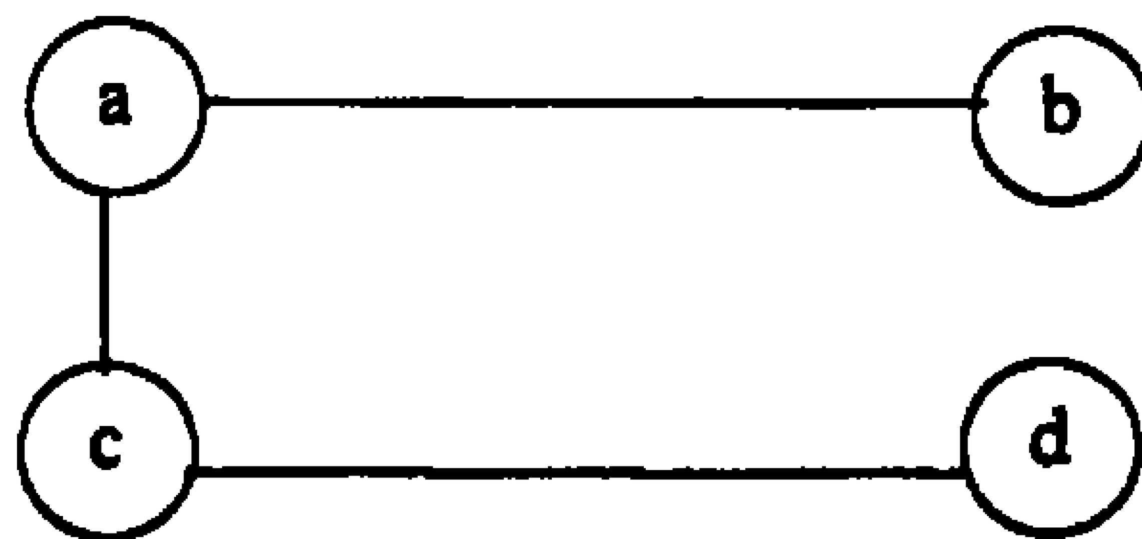
نكمل من هذه المرحلة بأن نرسم جميع الأضلع التي تصدر من الرأسين الحاليين إلى الرأسين المتبقيين، أي



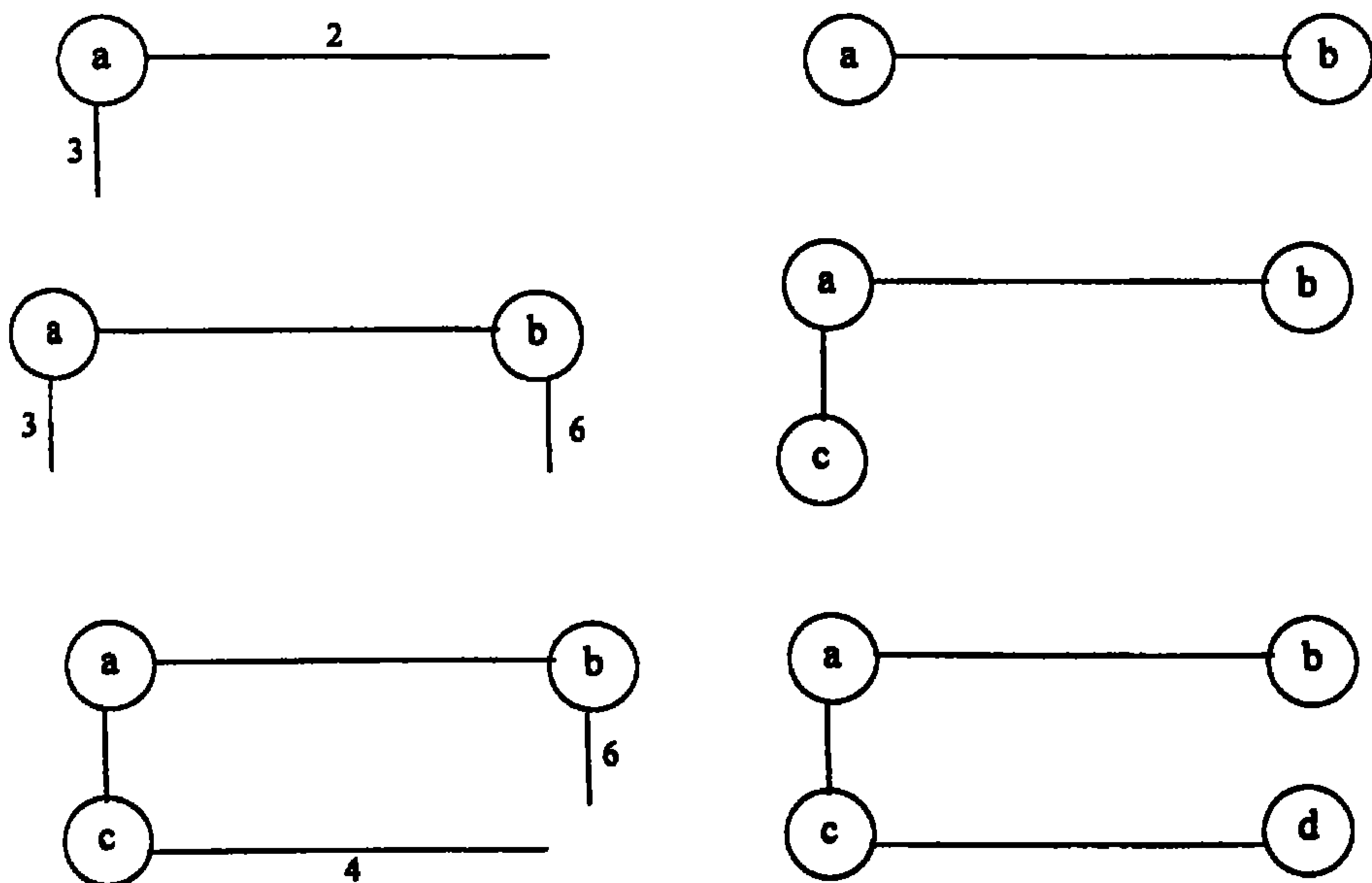
المنافسة تجري الآن بين ضلع طوله 3 والآخر طوله 6. حسب مبدأ أقصر ضلع نختار الضلع بين a و c ونرسمه مع نهايته الرأس c. بالتالي نحصل البيان التالي:



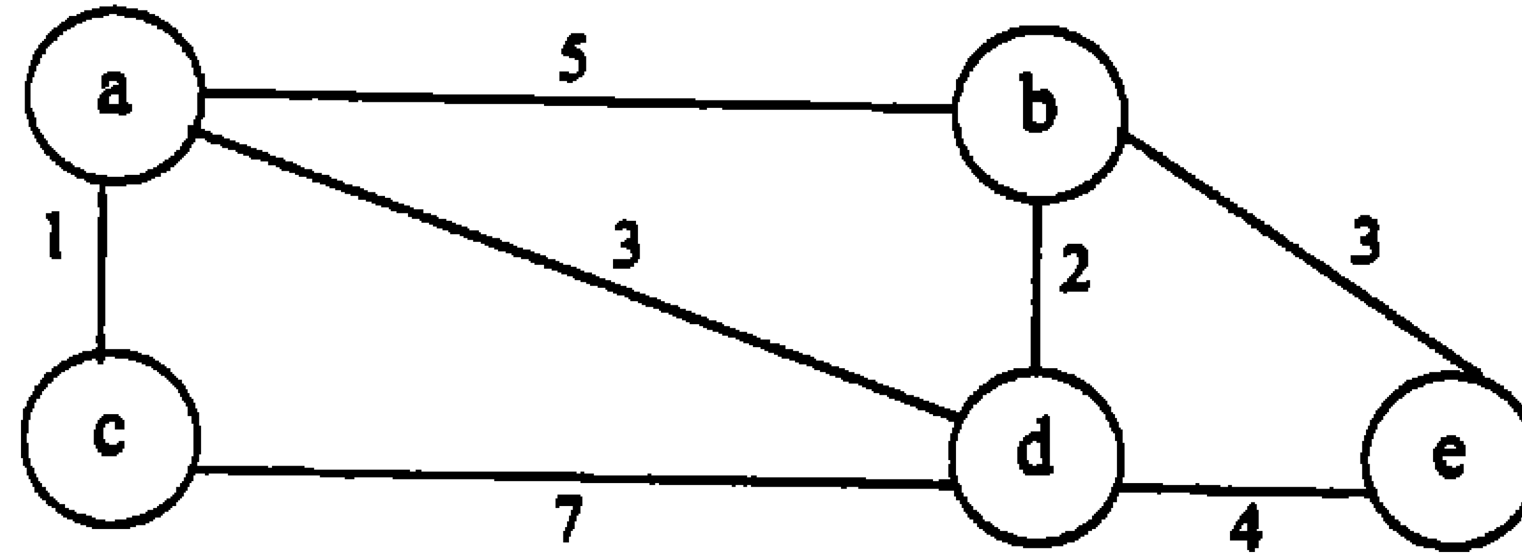
بقي علينا أن نشبك الرأس d في الشكل ولعمل ذلك أمامنا مهمة اختيار الضلـــع المناسب. يوجد ضلعان واختيار الأقصر يعطي الجواب النهائي التالي:



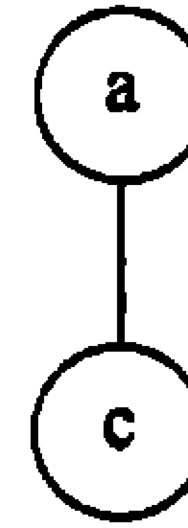
لاحظ أننا حصلنا على نفس الجواب السابق عندما استخدمنا طريقة كروســكال. إذاً، الطريقتان تعطيان عادةً نفس الشجرة. وإذا حدث اختلاف بسيط في الشــكل فــإن مجموع أطوال الأضلاع في الشجرة الناتجة عن طريقة كروسكال يكون مطابقاً لمجمــوع أطوال الأضلاع في الشجرة الناتجة عن طريقة برايم. لإيضاح الطريقة بشــكل أفضــل سنعمد إلى رسم كل مرحلتين معاً، أي سنرسم مرحلة الأضلاع المرقمة ومرحلة اختيار أحد هذه الأضلع على نفس السطر. لو أردنا إعادة كتابة مراحل الحل في مثال المربــع لحصلنا على الرسوم التالية:

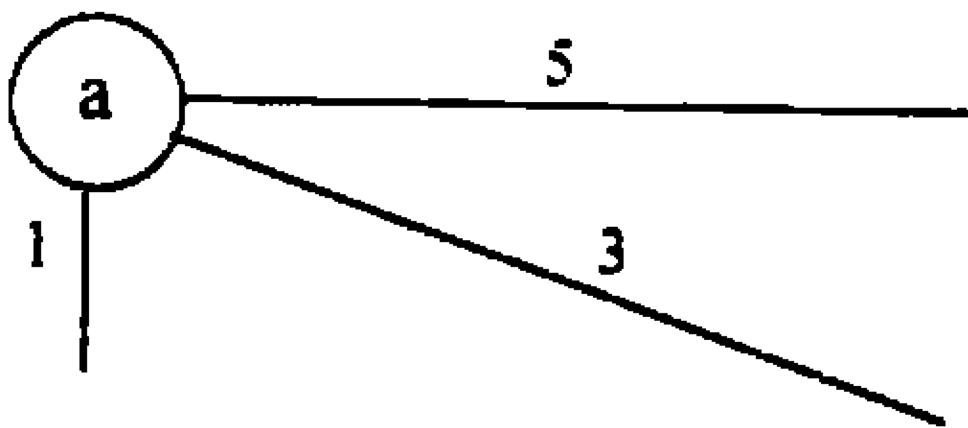


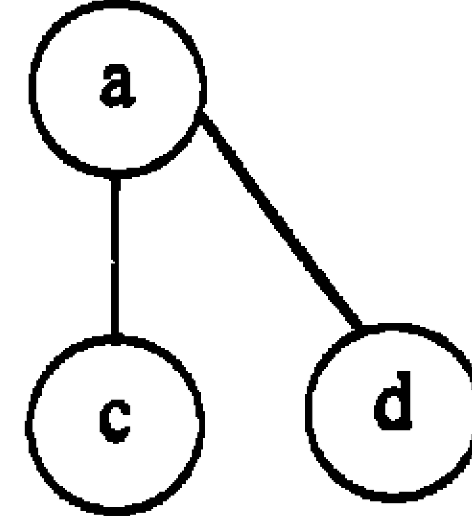
نلاحظ أن الرسوم على اليمين تحتوي على الرؤوس والأضلاع غير المرقمة بحيث يـزداد عدد الرؤوس من الأعلى إلى أسفل رأساً واحداً في كل سطر. سنعيد حساب الشـجرة المولدة الصغرى للبيان التالي بطريقة برايم:

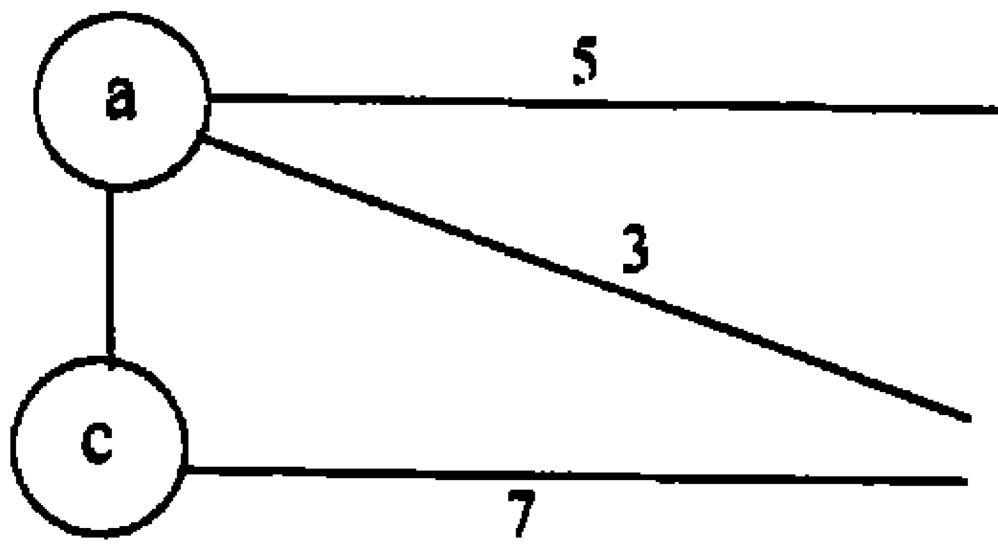


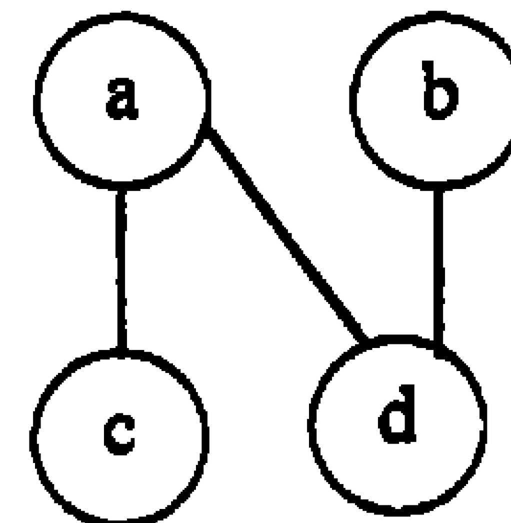
خطوات الحل هي:

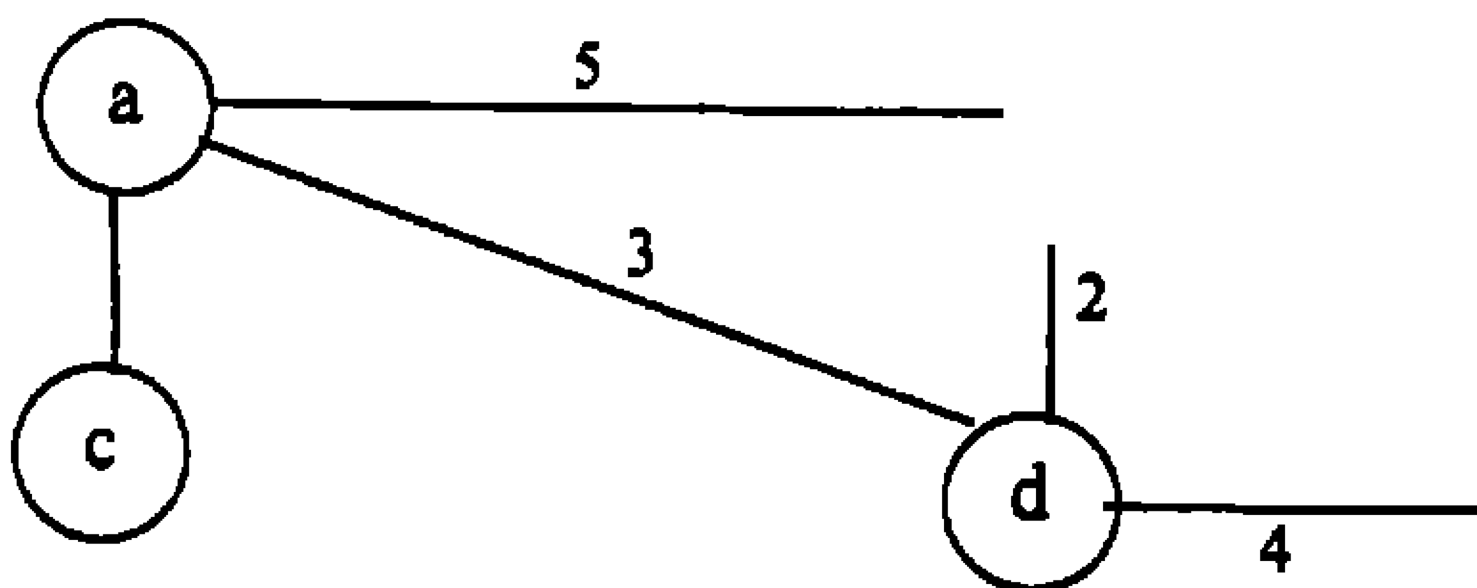


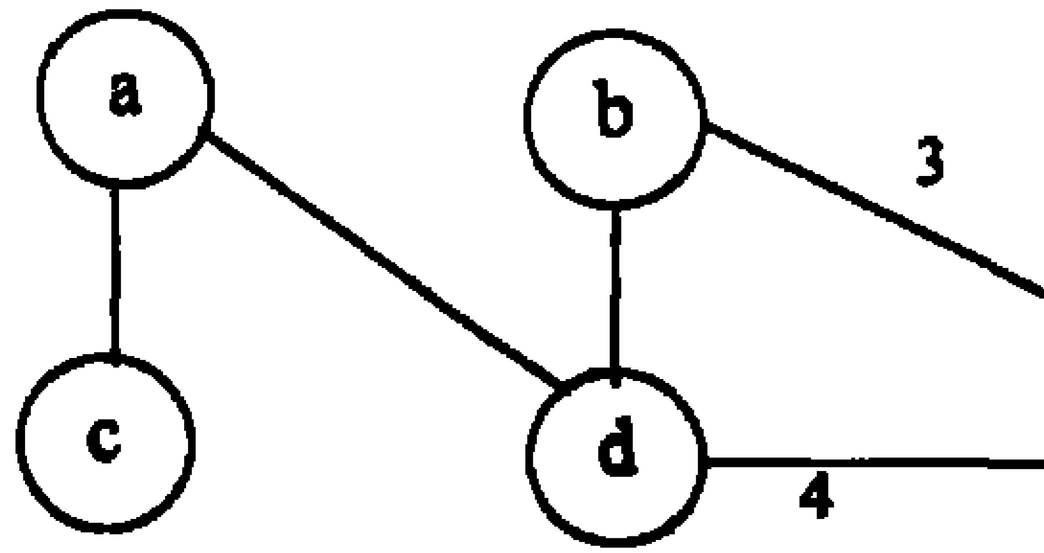


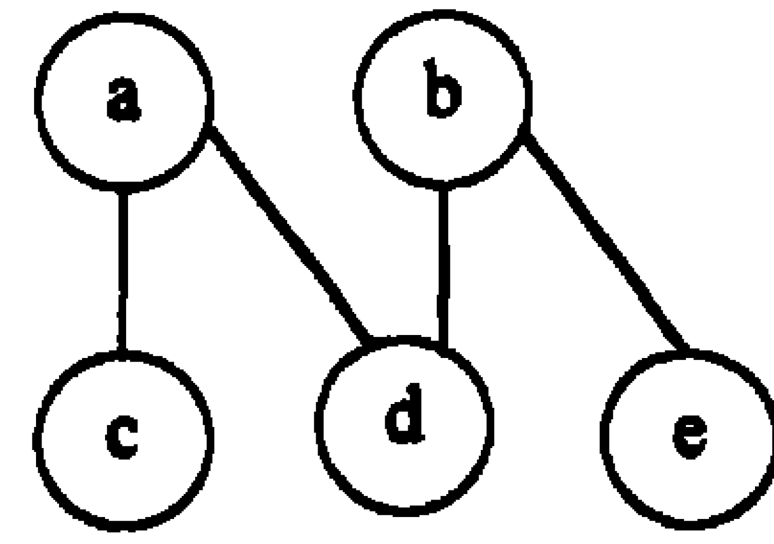




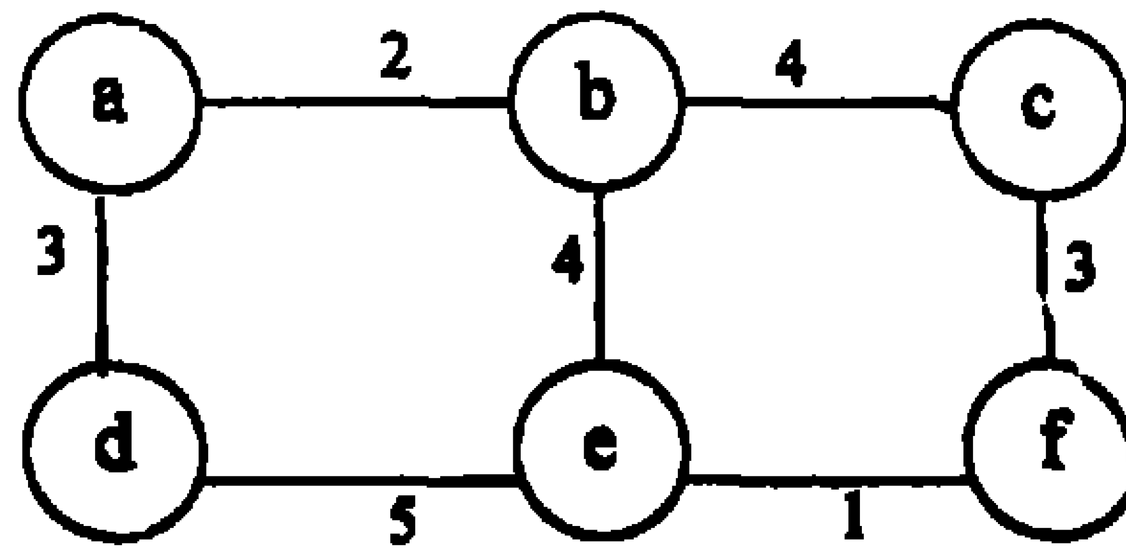




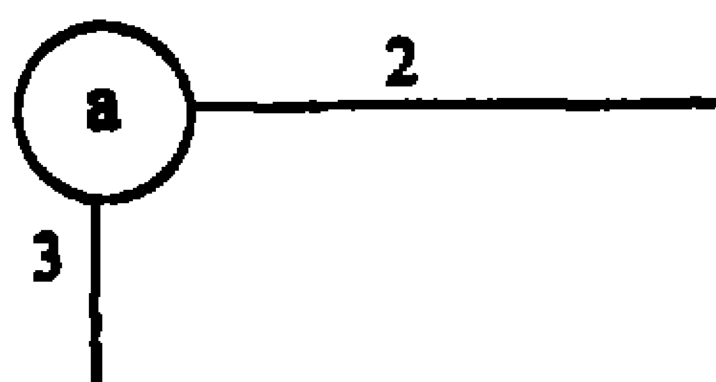




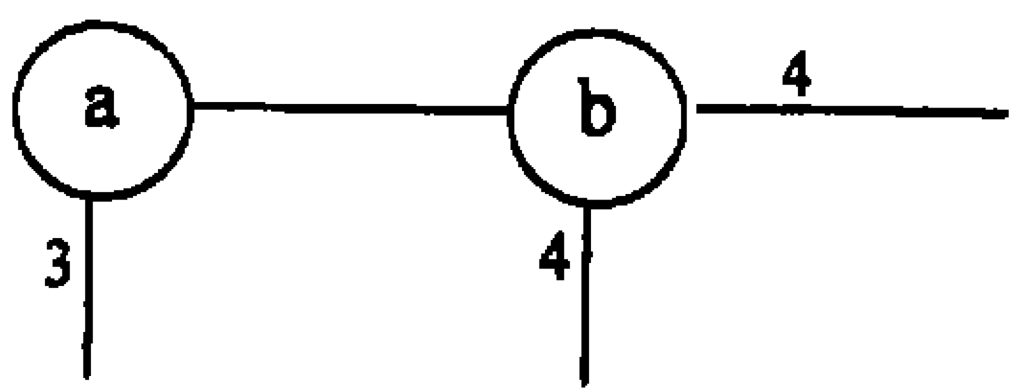
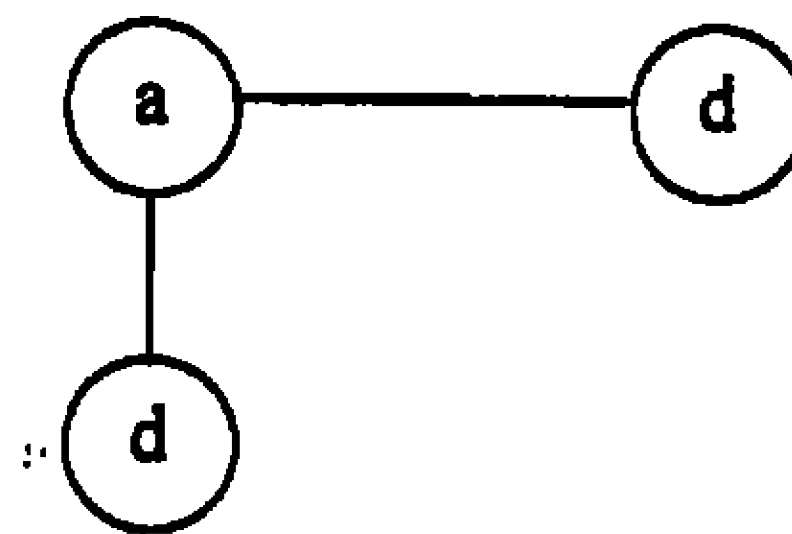
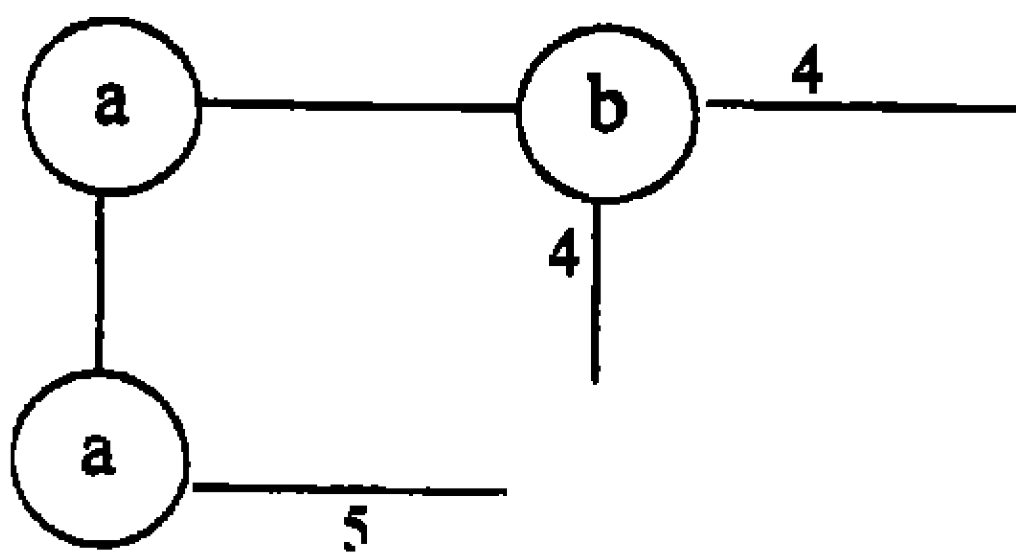
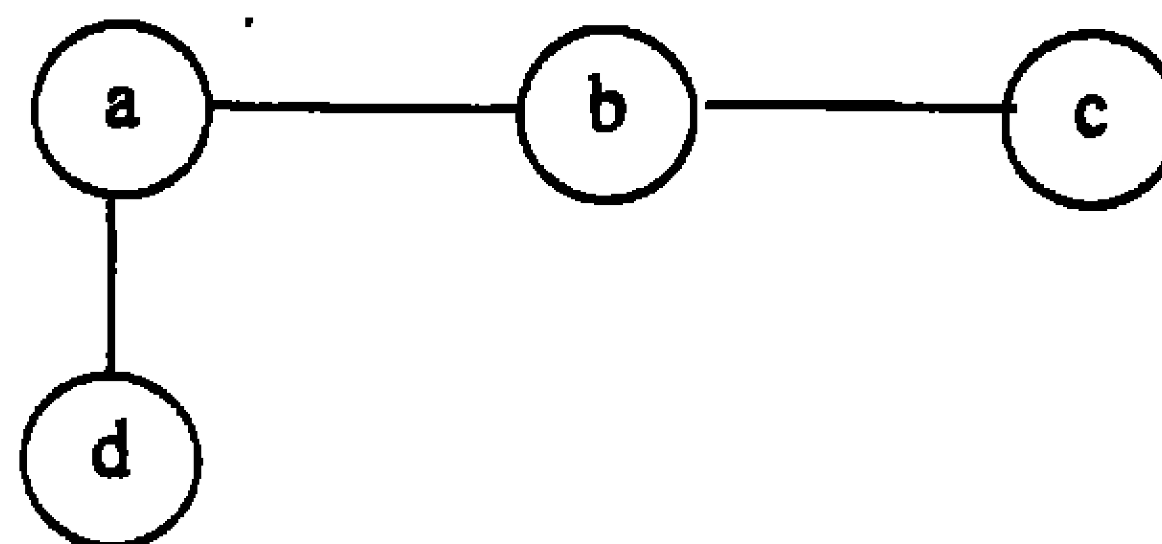
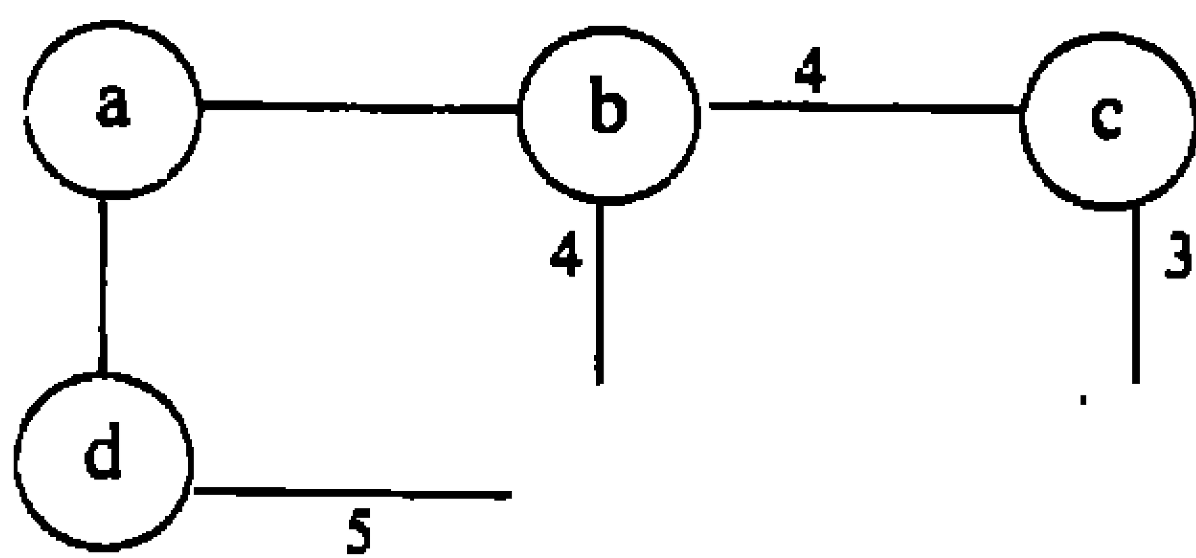
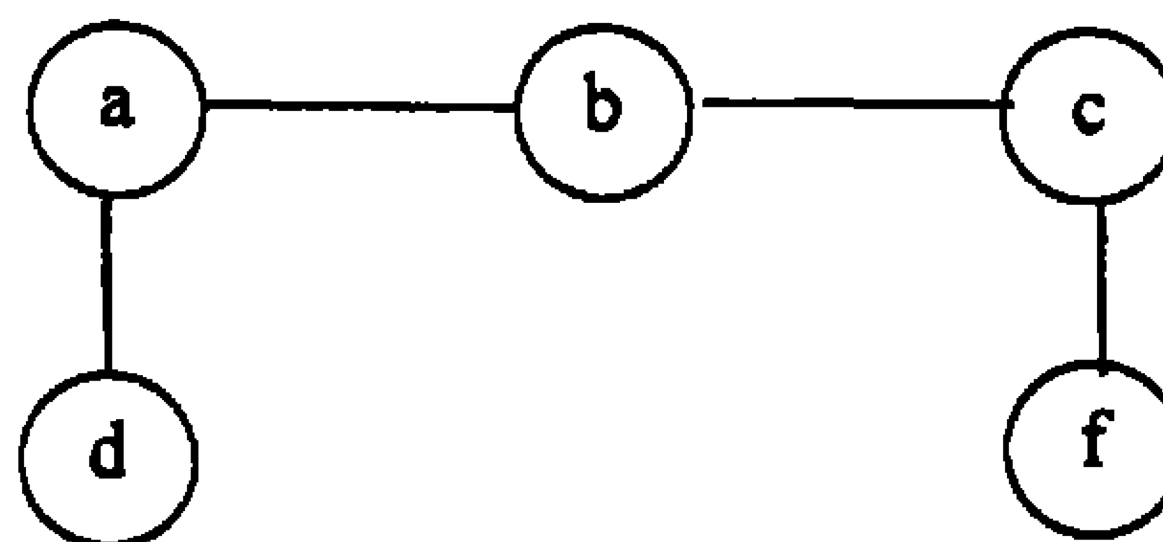
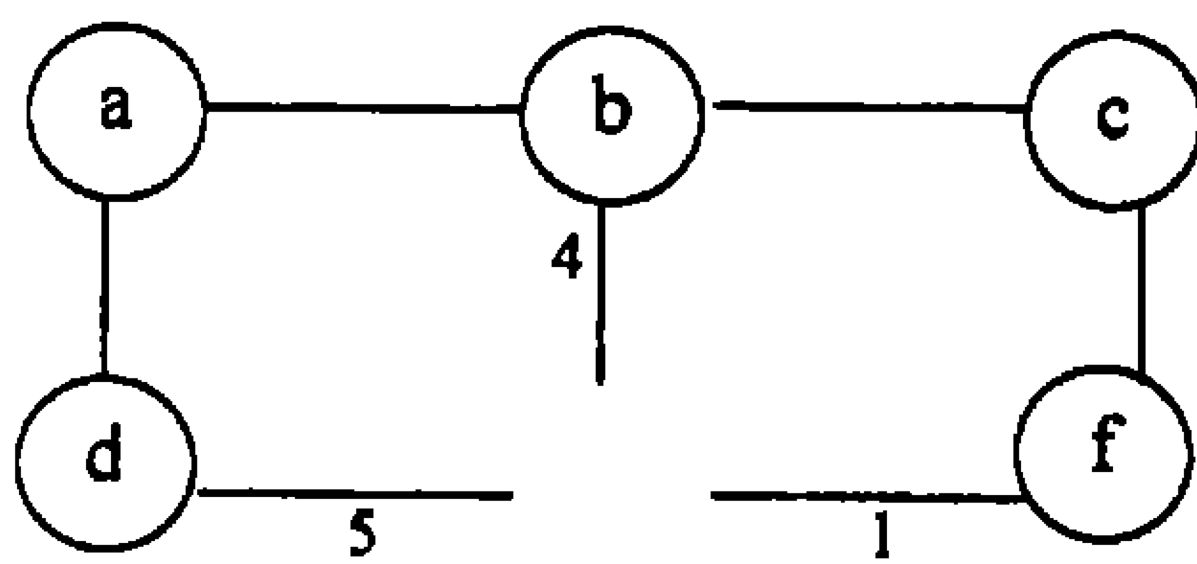
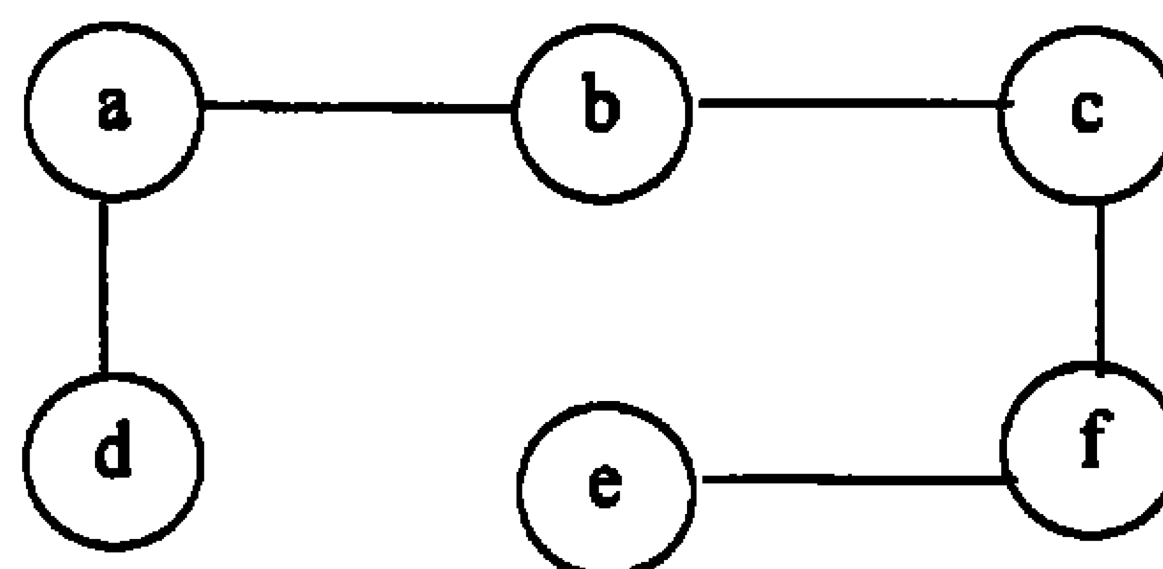
لاحظ أننا نرسم في كل مرحلة الأضلع مرقمة من رؤوس موجودة أصـــلاً في تلـــك اللحظة إلى رؤوس جديدة. عندما يتم اختيار الضلع الأقصر ويشبك بالتالي رأس جديد في الشبكة مع الرؤوس الأخرى فإن هذا الرأس يصبح بإمكانه أن يصدر أضلع مرقمـــة تشترك في عملية اختيار الضلع الأقصر عند إجراء للمرحلة القادمة. كما يجب ملاحظـــة أن انضمام أي رأس للشبكة يمنع بقاء الأضلع التي تصله مع رؤوس موجودة في الشـبكة في المنافسة الجديدة على أقصر ضلع. طبعاً، قد يحدث أن يتوجب علينا عنـــد اختيـــار أقصر ضلع انتقاء ضلع من بين عدة أضلع لها نفس الطول. في هذه الحالة نختار الضلـــع الذي يربط رأساً جديداً له الأولوية حسب الأبجدية مع بقية الرؤوس. مثـــلاً، لإيجـــاد الشجرة المولدة الصغرى داخل البيان:



نتبع الخطوات التالية:



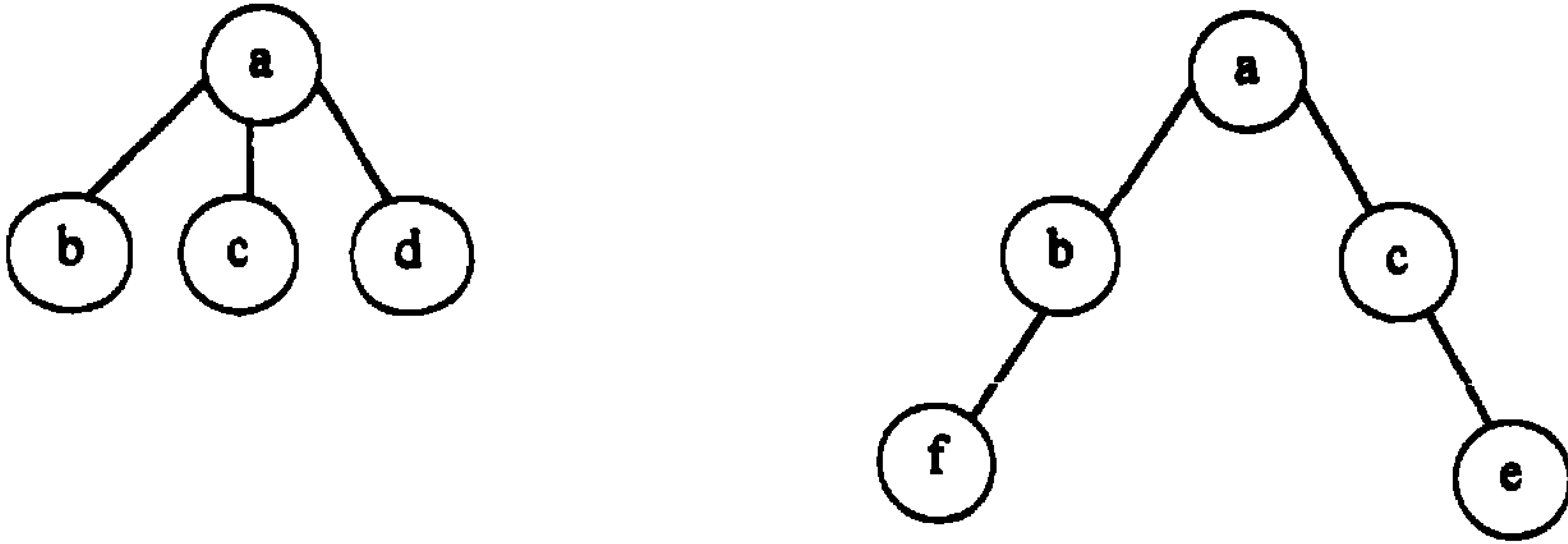



a
b
4
3
4

a
d
d

a
b
4
4
a
5

a
b
c
d

a
b
4
c
4
3
d
5

a
b
c
d
f

a
b
c
4
d
5
1
f

a
b
c
d
e
f

الفصل الرابع

شجرة البحث الثنائية

نقصد بالشجرة الثنائية تلك الشجرة التي يكون عدد تفرعات كل دائرة من دوائرها على الأكثر اثنين عند رسمها في الصورة الهندسية المعيارية. مثلاً،



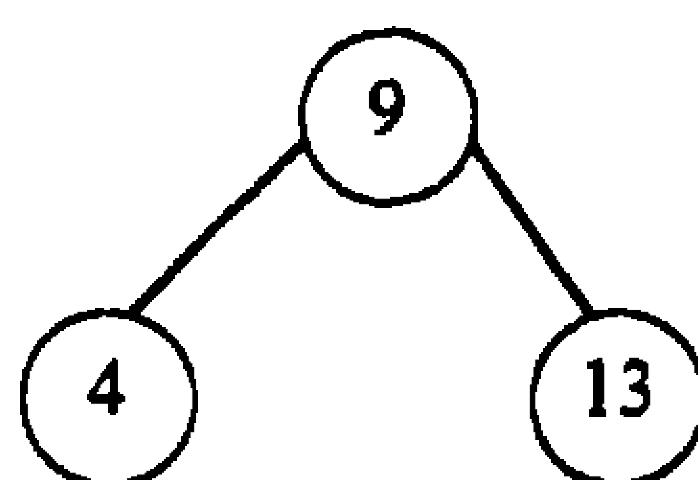
الشجرة على اليسار ليست ثنائية لأن الدائرة a لها 3 فروع. الشجرة على اليمين ثنائية ونلاحظ أن تفرعات الدوائر تكون إما على اليمين أو على اليسار أو كلاهما. الأشجار الثنائية تلعب دوراً هاماً وسنتعرف الآن على أول تطبيق لها في مسألة فرز البيانات.

لو كان لدينا مجموعة أعداد تمثل معلومات بيانية ورغبنا في ترتيب (فرز) هذه الأعداد بطريقة جيدة، حيث نعني بجيدة أن تكون عملية البحث عن عدد ما سريعة، لأمكننا عمل شجرة بحث ثنائية لمجموعة الأعداد. مثلاً، لو توافرت الأعداد التالية من تسجيلات ظاهرة معينة:

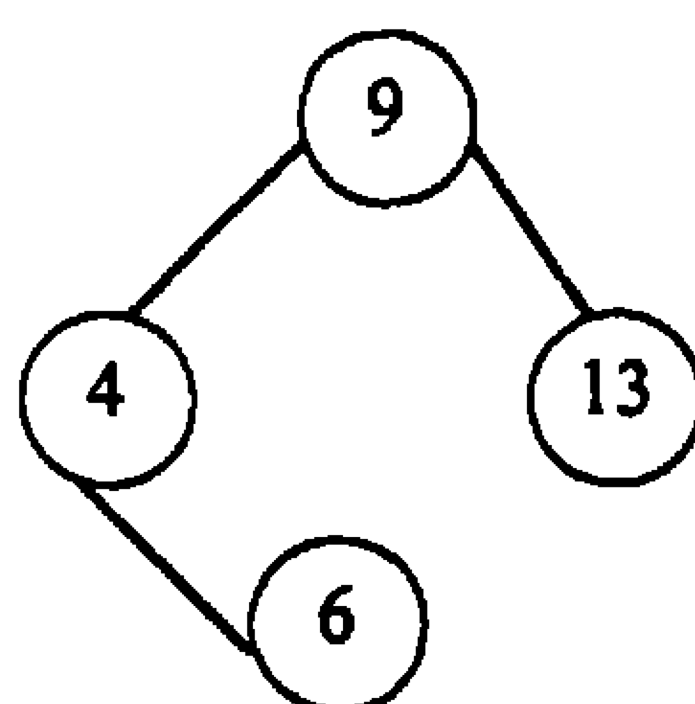
9 , 4 , 13 , 6 , 18 , 1 , 10 , 15

إن القيام بإنزال هذه الأعداد كما هي على شريط معلومات يجعل عملية التأكد من أن عدد يقع خارج المجموعة أمراً صعباً. فلو أردنا التأكد من أن العدد 7 غير موجود

بطريقة الحاسب الآلي، لتوجب علينا أن نبدأ من اليسار إلى اليمين ونقارن العدد 7 مع كل عدد نجده تباعاً. بعد ثمانية مقارنات سنصل إلى الحقيقة بأن العدد 7 غير موجود ضمن المجموعة. في هذه الحالة تكون طريقة الشجرة الثنائية أسرع. طبعاً، لا بد من بذل جهد في البداية لتحضير الشجرة. لكن، ما سنجنيه في النهاية من توفيرٍ للوقت في عمليات البحث يجعل بذل الجهد الأولي أمراً مستحقاً. رسم شجرة البحث الثنائية يكون مباشرة في الصورة الهندسية المعيارية ويكون أول عدد هو جذر الشجرة في الأعلى. ثم يبدأ الجذر بالتفريع بحيث العدد الذي يصغره قيمة يأتي على يساره والذي يكبره على يمينه. هذا المبدأ سينطبق لاحقاً على الفروع وما تتفرع إليه. إذاً، بعد أن نضع العدد 9 في جذر الشجرة نفرع إلى اليسار العدد 4 وإلى اليمين العدد 13، فيصبح لدينا الشكل التالي:

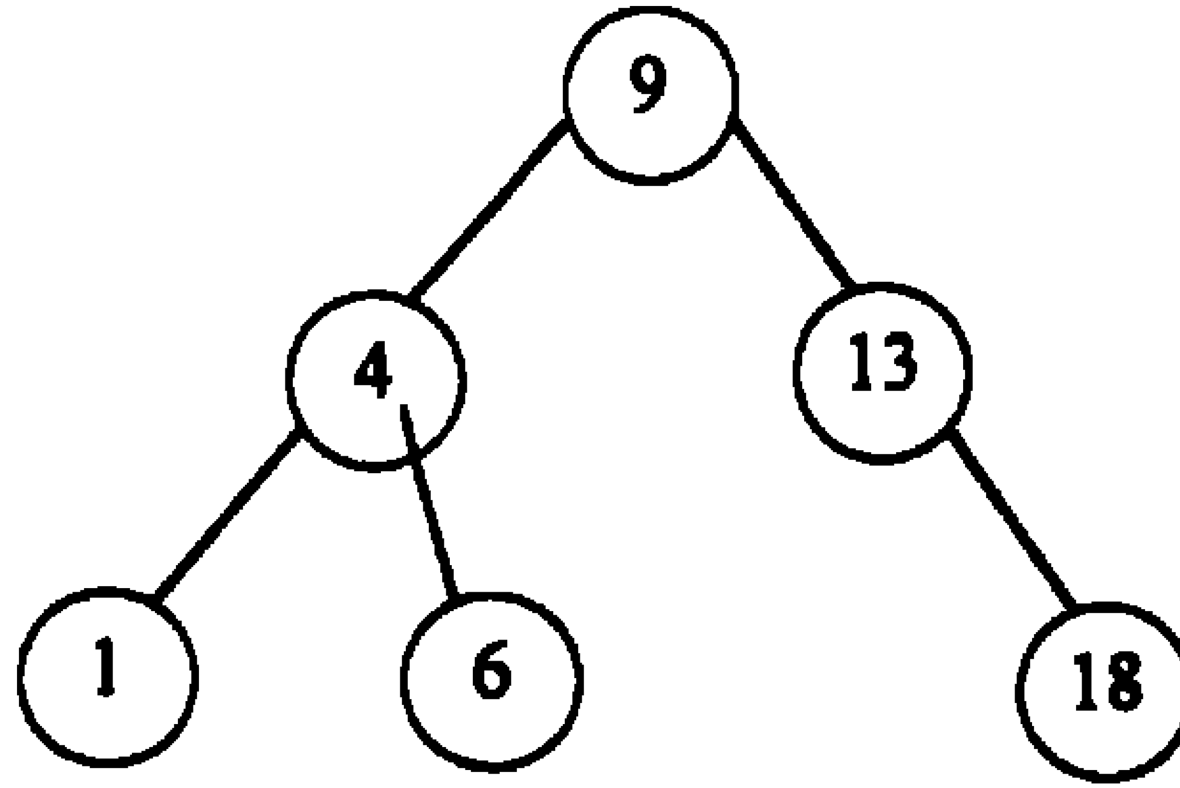


نأخذ الآن العدد 6 ونبدأ من الجذر. بما أن 6 أصغر من 9 فإنها ستوضع في دائرة يسار الجذر. لكن، على اليسار توجد دائرة العدد 4. نعيد مبدأ التفريع لدائرة العدد 4 فتأتي دائرة العدد 6 على يمينها. أي يصبح الشكل كالتالي:

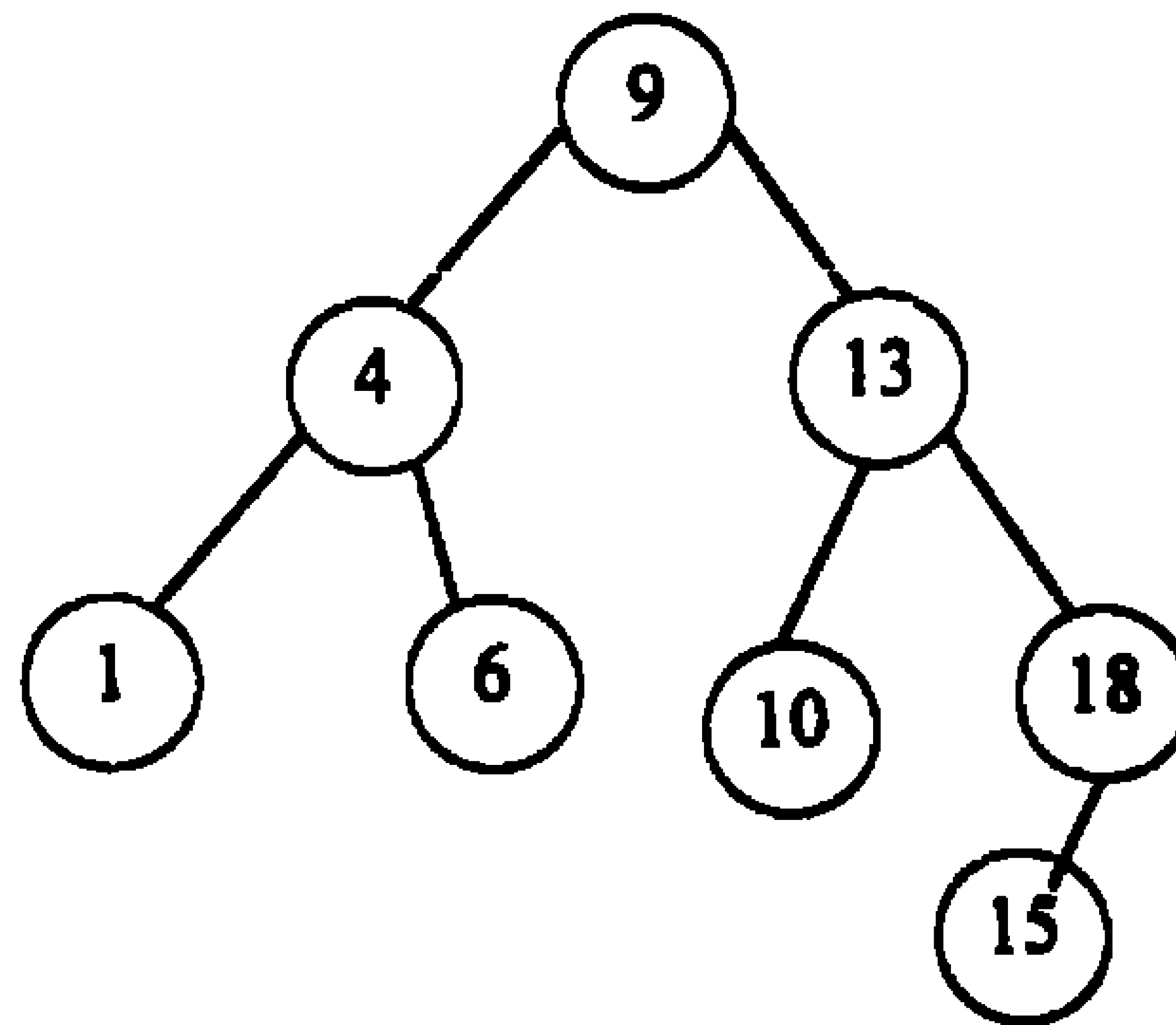


يأتي بعد ذلك دور العدد 18 لكي يفرز في الشجرة. هذا العدد يكون يمين الجذر 9 ثم

يمين العدد 13. أما العدد 1 فإنه يأتي يسار الجذر 9 ثم يسار العدد 4 فينتـــج الشـــكل التالي:



نـــزل بعد ذلك العدد 10 بحيث يكون يمين 9 ثم يسار العدد 13 وأخيراً الـــعدد 15 يمين العدد 9 ثم يمين العدد 13 ثم يسار العدد 18. الشجرة في صورتها النهائية هي



لاحظ ضرورة الالتزام بفرز الأعداد تباعاً كما جاءت في قائمة البيانات. البحث عـــن العدد 7 داخل الشجرة سيتم وكأن العدد 7 كان ضمن المجموعة. أي العدد 7 يفـترض به أن يأتي يسار العدد 9 ثم يمين العدد 4 ثم يمين العدد 6. لكن، لا يوجد شيء علـــى يمين الدائرة المحتوية على العدد 6. إذاً، العدد 7 غير موجود ضمن مجموعـــة الأعـــداد واستغرق البحث منا المقارنة مع ثلاث دوائر بدل المقارنة مع ثمانية أعداد.

حتى لو بحثنا عن عدد موجود داخل المجموعة مثل العدد 1. البحث المباشر مـــن خلال المقارنة يستغرق ست محاولات للوصول إلى نتيجة مفادها أن العدد 1 موجـــود

ضمن المجموعة. أما لو بحثنا داخل الشجرة لانطلقنا من الجذر إلى اليسار ثم يسار الأربعة لنجد العدد 1. أي البحث في الشجرة لم يحتاج إلى أكثر من ثلاث مقارنات. قد يحدث أحياناً أن يتساوى عدد المقارنات المباشرة مع عدد المقارنات داخل الشجرة مثلما يحدث عند البحث عن العدد 4. لكن ، يمكن الجزم بأنه إذا لم يتساوى عدد المقارنات فإن البحث داخل الشجرة يستغرق خطوات أقل من البحث العادي.

الفصل الخامس

شجرة هوفمان للشيفرات

هذا الموضوع هو ثاني تطبيق للأشجار الثنائية. كما هو معروف الشيفرة عبارة عن رموز تدل على حروف وكلمات معينة. ويتم استخدام الشيفرات كنوع من أنواع التخاطب بطريقة سرية أو لكي نجعل الحاسوب يفهم الكلمات والحروف التي يتم إدخالها. يوجد نظام معروف يتم بموجبه إعطاء الأبجدية الإنجليزية أعداداً مكونة من 7 خانات (كحد أقصى) بحيث يأتي في كل خانة الرقم 0 أو الرقم 1. هذا نوع من أنواع التشفير لأغراض تصميم الحاسبات. لقد قام هوفمان بإيجاد وسيلة أخرى للتشفير تهدف إلى تحقيق مكسب عملي. هذا المكسب هو أن يكون مجموع عدد الخانات في جميع الكلمات المشفرة أقل ما يمكن. لنقل مثلاً أن الكلمات التي يراد تشفيرها تستخدم أربعة حروف فقط: A و B و C و D. ولاحظنا أن نسبة تكرار الحرف A داخل جميع الكلمات المستعملة كان 20% بينما الحرف B كانت نسبة توافره 30%. أما حرف C فنسبته 10% وحرف D له النسبة 40%. إذاً، حرف D هو الأكثر شيوعاً، ويفترض أن يكون عدد الخانات للشيفرة الخاصة به قليلة. وكذلك يفترض أن يكون عدد الخانات التي تستخدمها شيفرة الحرف C أكبر من عدد خانات بقية الحروف. هذه الافتراضات واقعية ومنطقية لتحقيق هدف أن لا تأخذ الكلمات المستعملة بعد تحويلها إلى شيفرات عددية حجماً كبيراً للتخزين في الذاكرة أو عند إرسال ملفات عددية تعبر عن رسائل لغوية. كما ينبغي أن نراعي أثناء حساب الشيفرات للحروف الأربعة أن لا يحدث تداخل بمعنى أن تكون شيفرة حرف ما قريبة من شيفرة حرف آخر بحيث عندما نحول الكلمة إلى عدد مكون من خانات متلاصقة

تمثل الأحرف ونعيد تحويل العدد بالعكس إلى كلمة تنتج الكلمة الأصلية دون لبـــس. كما أن التحويل العكسي يجب أن يستنفذ جميع الأرقام 0 و 1 الموجودة داخل العـــدد ولا يبقى منها شيئاً دون تحويل إلى حروف. سنطبق الآن فكرة هوفمان عملياً ونـــرى بشكل أوضح ما أسلفنا. سنتعامل مع نسب الحروف كأعداد مطلقـــة أي ســـندرس الجدول التالي:

C	A	B	D
10	20	30	40

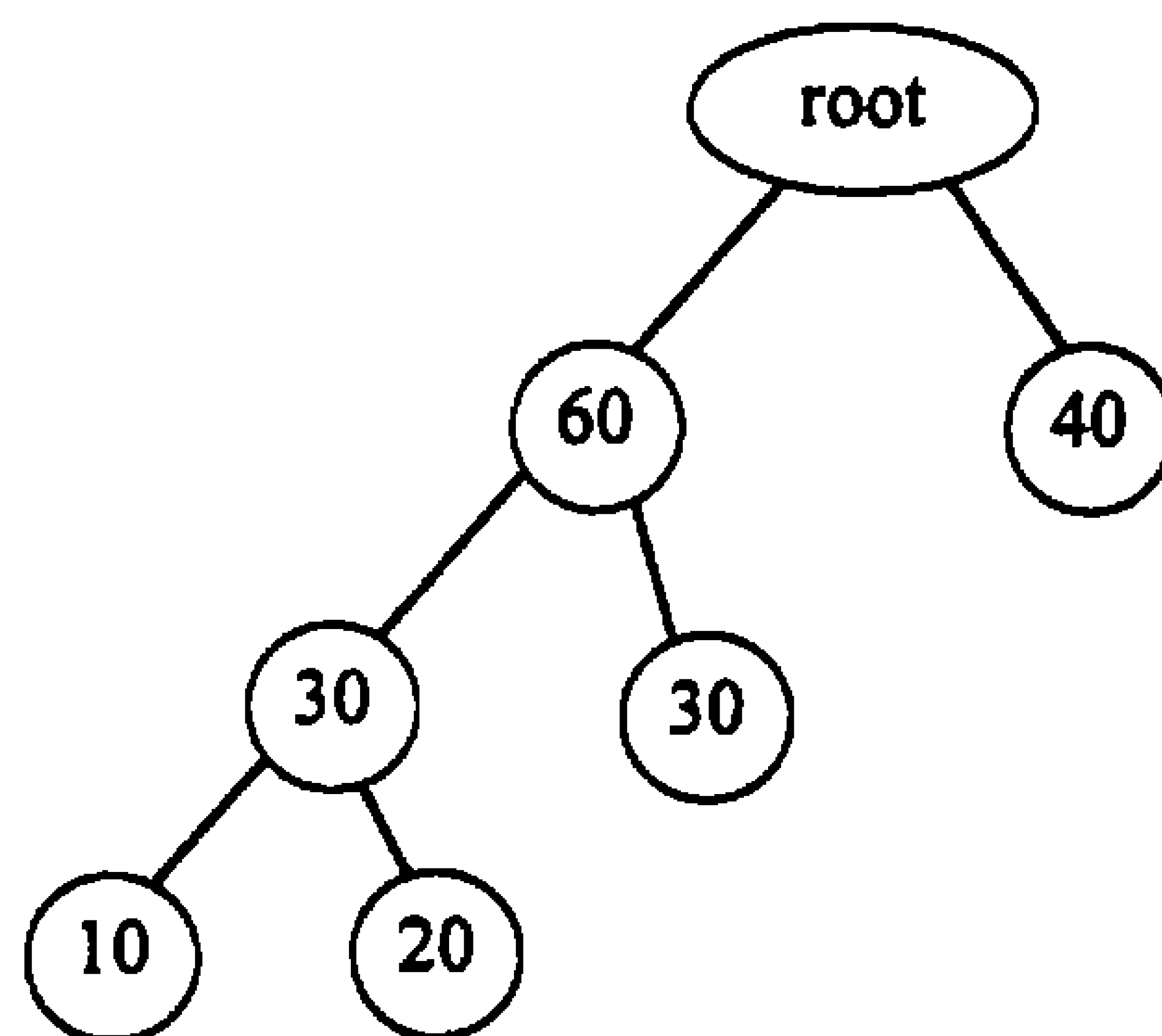
لاحظ أننا رتبنا الحروف من اليسار إلى اليمين حسب قيمة نسبها تصاعديـــاً. نبـدأ بأصغر عددين ونجمعهما أي نرتب الأعداد كالتالي:

30 , 30 , 40

ثم نعيد جمع أصغر عددين فينتج

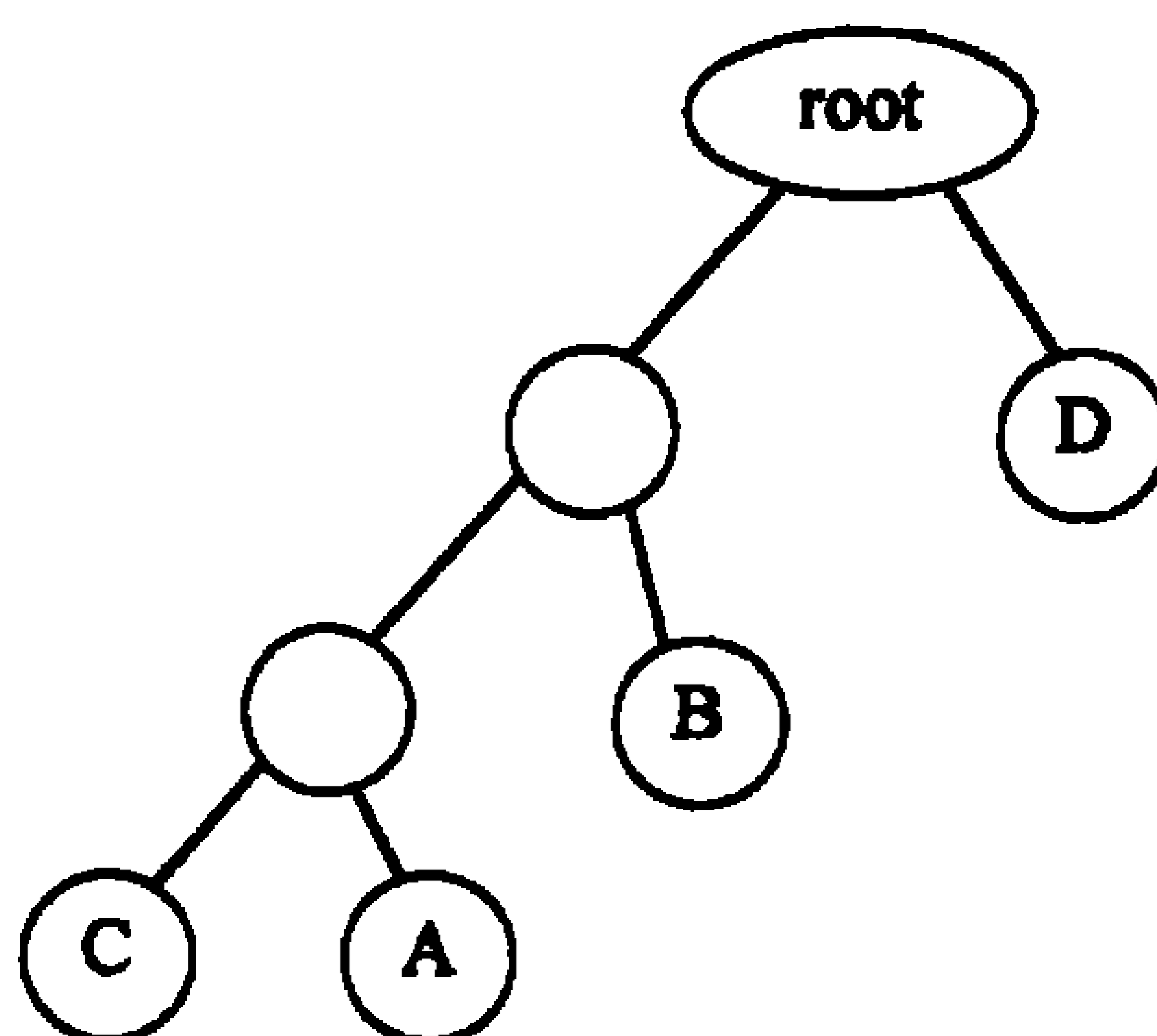
60 , 40

عند بقاء عددين فقط نقف ونقوم بفرز الأعداد من أعلى إلى أسفل في صورة شـــجرة ثنائية:



لاحظ أننا وضعنا في دائرة الجذر كلمة جذر بالإنجليزية وقمنا بالتفريع إلى آخر عدديـــن في الحسابات. ثم تتفرع كل دائرة إلى أصلها من خلال عملية الجمع التي اســـتخدمناها

في الحسابات. الآن نقوم برسم شجرة جديدة بحيث نزيل الأعداد من الدوائر التي تتفرع ونستبدل الأحرف بالأعداد داخل الدوائر التي لا تتفرع كما جاءت في الجدول الأصلي، أي نحصل على



من هذه الشجرة سنشتق الشيفرة لكل حرف بحيث أن نعطي الاتجاه من الجذر وهبوطاً 0 لحركة اليمين و 1 لحركة اليسار. لذا، نقول أن الجدول التالي يمثل شيفرة هوفمان:

C	A	B	D
111	110	10	0

لاحظ أن D (الحرف الأكثر شيوعاً) يستخدم عدداً مكوناً من خانة واحدة فقط للتعبير عنه. بينما الحرف C (الأندر شيوعاً) يستخدم عدداً أكبر مكوناً من ثلاث خانات. قد يحصل أن يستخدم حرف آخر غير C كالحرف A هنا نفس العدد من الخانات في شيفرته. هذا يعود لكون نسبته قريبة من نسبة الحرف C. لو أردنا تحويل كلمة DAD إلى شيفرة لاستبدلنا الحروف بأعداد مستخدمين نفس الترتيب من اليسار إلى اليمين أي 01100. ولو أردنا أن نفك الكلمة المشفرة على أنها 11011110، لقمنا بالمسير من اليسار إلى اليمين ونبدأ بخانة ثم خانتين ثم ثلاثة وهلم جرا حتى نحصل على عدد موجود في الجدول. إذا ترجمنا حرف ما نلغي جميع خاناته ونبدأ مجدداً حتى اكتمال ترجمة جميع الخانات. في العدد 11011110 أول خانة 1 لا معنى لها وكذلك

أول خانتين 11 لا وجود لها في الجدول. أما أول ثلاث خانات 110 فهي ترمز إلى الحرف A. نعيد الآن البحث عن الحرف الثاني داخل العدد 11110. طبعاً، البحث يعطي الحرف C ويبقى 10 الذي يعبر عن الحرف B. إذاً، الكلمة هي ACB.

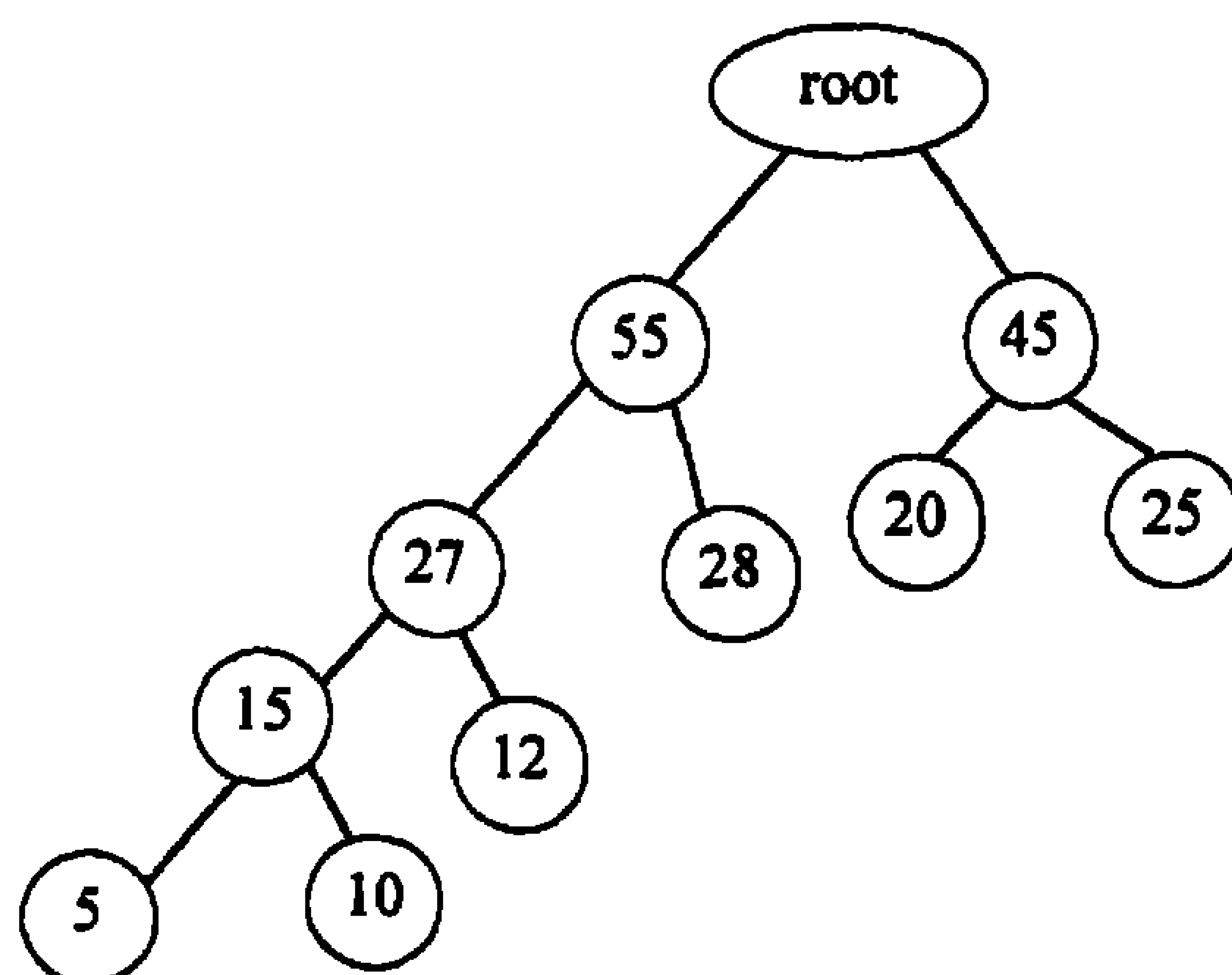
سنورد مثالاً آخراً لجدول يبين نسب استخدام الحروف F, E , D , C , B , A كالتالي:

C	A	B	D	E	F
5	10	12	20	25	28

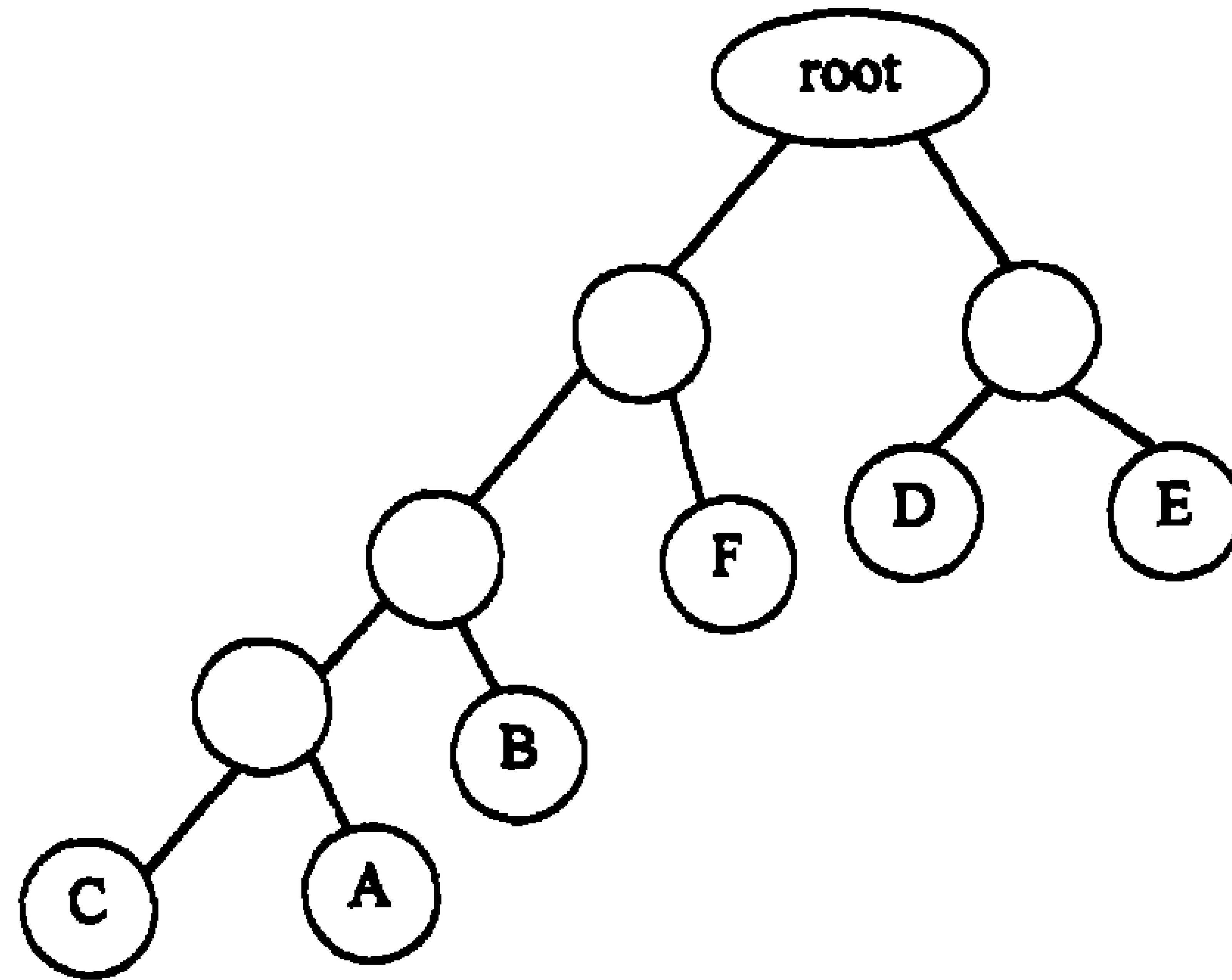
سنبدأ عمليات الجمع تباعاً لأصغر عددين كالتالي:

15 , 12, 20 , 25 , 28
27 , 20 , 25 , 28
27 , 45 , 28
55, 45

لاحظ أننا عند جمع 20 و 25 وضعنا قيمة الجمع في مكان العدد الأول أي 20 وليس في بداية السطر. الشجرة التي ترمز إلى هذا المثلث العددي هي



وتتحول إلى شجرة شيفرات كالتالي:



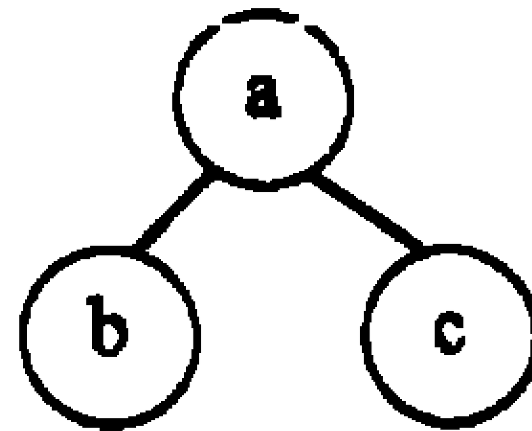
وتكون الشيفرات كالتالي:

C	A	B	D	E	F
1111	1110	110	01	00	10

الفصل السادس

قراءة الشجرة الثنائية

يطلب من المرء أحياناً أن يكتب جميع محتويات دوائر شجرة ثنائية قرب بعضها البعض على سطر واحد. لفعل هذا الأمر بطريقة منتظمة ومدروسة توجد ثلاث طرق، بمعنى آخر توجد ثلاث طرق لقراءة الشجرة الثنائية. سنبدأ بشجرة ثنائية بسيطة للغاية وهي الشجرة التالية:



كما هو معروف الدائرة a هي جذر الشجرة. الدائرة b هي يسار الجذر والدائرة c هي يمين الجذر. جميع الطرق الثلاث للقراءة تضع اليسار قبل اليمين. حسب موقع الجذر في الترتيب يتم تصنيف القراءات الثلاث. القراءة الأولى تدعى بالقراءة المقدمة التي يتقدم فيها الجذر على اليسار واليمين. أي بالرموز يكون الترتيب:

Root - Left - Right

a - b - c

القراءة الثانية هي القراءة الوسطية التي يكون موقع الجذر فيها وسط بين اليسار واليمين. أي بالرموز يكون الترتيب :

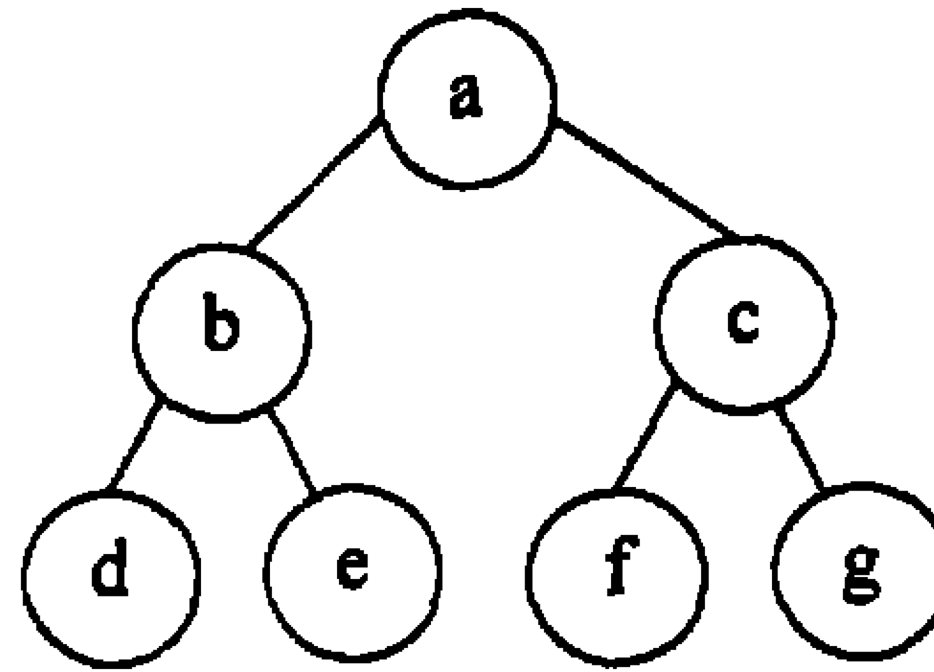
Left - Root - Right

b - a - c

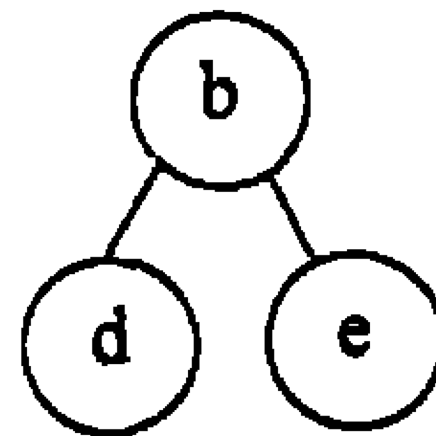
أما الوضعية الثالثة والأخيرة فهي أن يوضع الجذر في الأخير وتدعى القـــراءة المؤجلـــة (المؤخرة). أي بالرموز يكون الترتيب:

Left - Right - Root
b - c - a

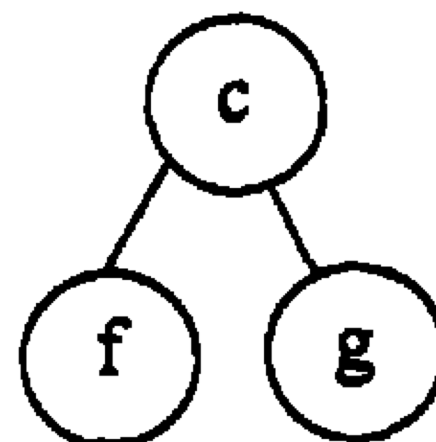
لو أخذنا شجرة ثنائية ذات ثلاثة مستويات مثل الشجرة:



لكان الجذر هو الدائرة a. اليمين في هذه الحالة هو الشجرة



أما اليسار فهو الشجرة



لمواجهة هذه الوضعية نقرأ الشجرة الصغيرة المحتواة داخل الشـــجرة الكبـــيرة بنفـــس الطريقة التي نقرأ بها الشجرة الكبيرة. لو أردنا أن نقرأ الشجرة السابقة بالطريقة المقدمة لقلنا أن النتيجة هي

a - bde - cfg

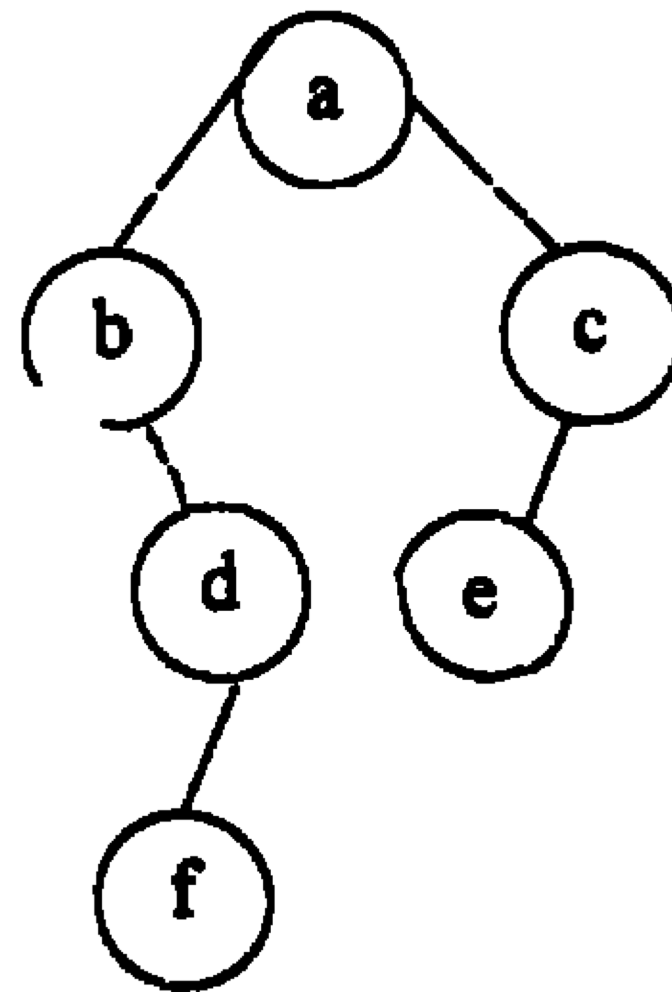
لاحظ أن الشجرتان الصغيرتان تمت كتابة محتوياهما كما لو قرئتا بالطريقة المقدمة وتم ترتيب المحتويات جميعها معاً ابتداءاً من الجذر فاليسار ثم اليمين. القراءة الوسطية ستفضي إلى:

d b e a f c g

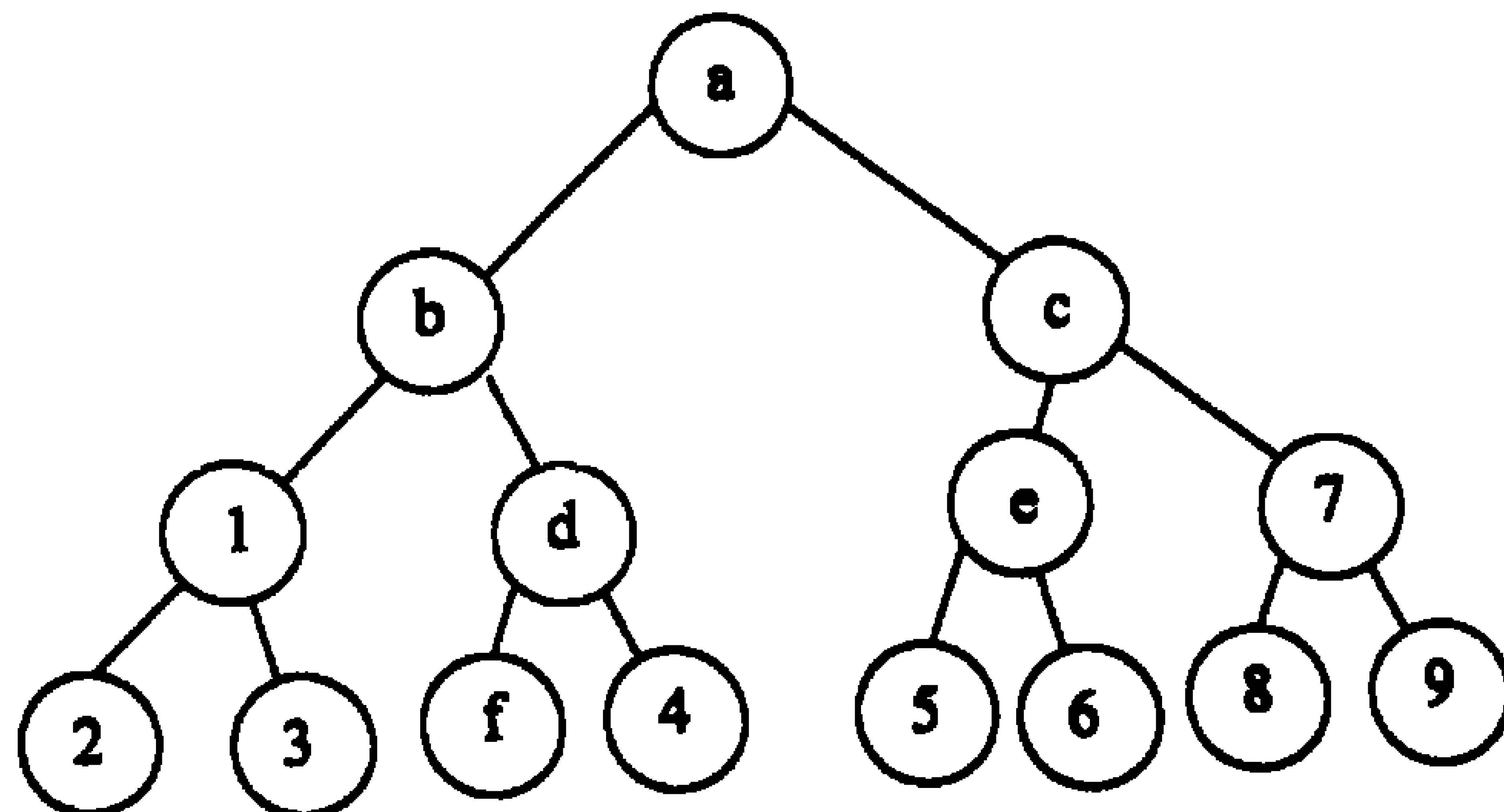
والطريقة المؤجلة ستفضي إلى:

d e b f g c a

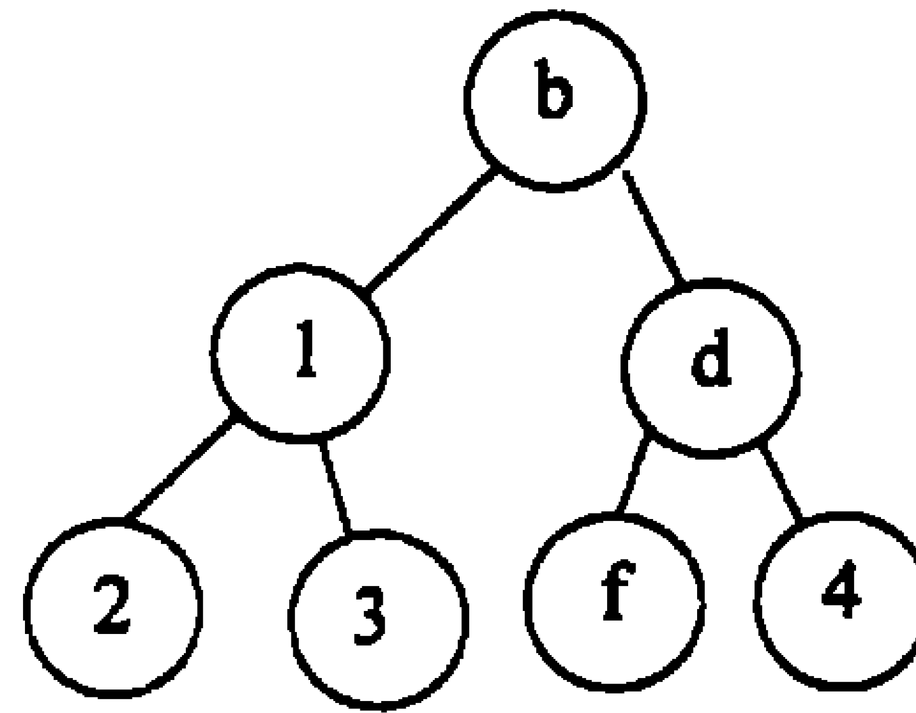
مبدأ التقسيم من حذر الشجرة في أول سطر إلى يسار ويمين ثم قراءة كل جزء بنفس الطريقة يتم تطبيقه على جميع الأشجار الثنائية. أحياناً تكون بعض الأضلع اليمنى أو اليسرى مفقودة. في هذه الحالة نستعيض عنها بدوائر تحمل أرقاماً لتمييزها عن الحروف يتم إضافتها ثم تزال الأرقام من الترتيب النهائي. مثلاً



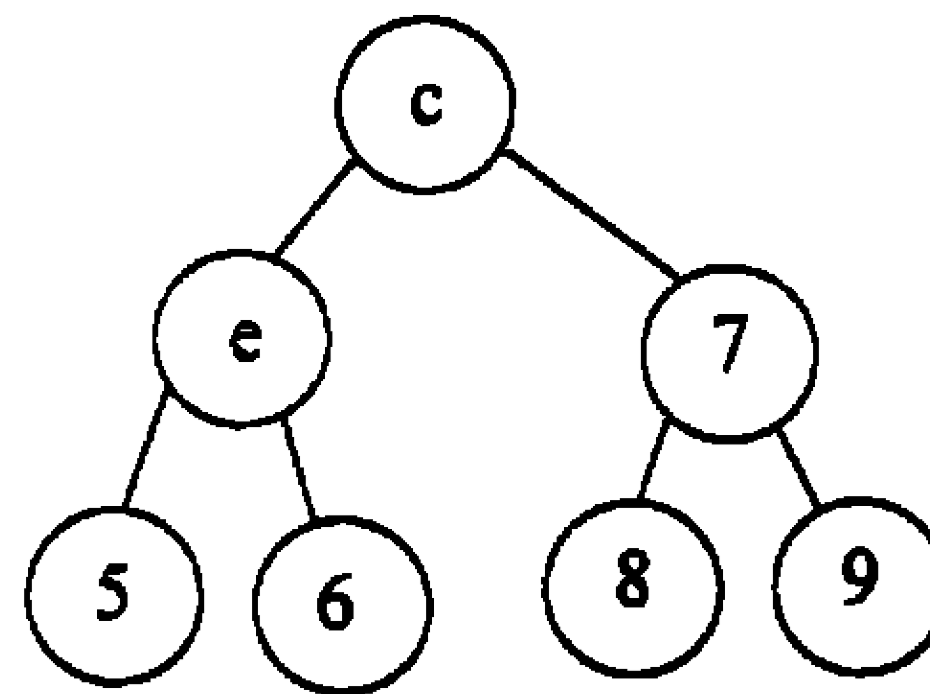
تصبح بعد إضافة الأضلع الناقصة كالتالي:



الجذر هو a واليسار هو الشجرة



أما اليمين فهو



القراءة المقدمة تعطي النتيجة الأولية التالية:

a b 1 2 3 d f 4 c e 5 6 7 8 9

وبالتالي النتيجة النهائية والمطلوبة هي

a b d f c e

القراءة الوسطية تعطي

2 1 3 b f d 4 a 5 e 6 c 8 7 9

وكجواب نهائي

b f d a e c

وأخيراً القراءة المؤجلة ترتب المحتويات كالتالي:

2 3 1 f 4 d b 5 6 e 8 9 7 c a

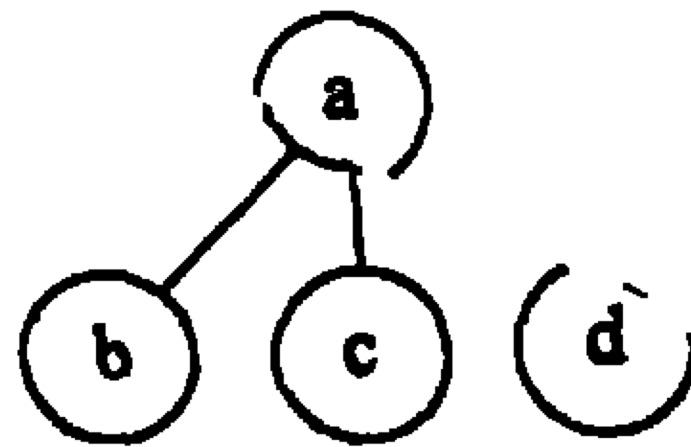
أي الجواب هو

f d b e c a

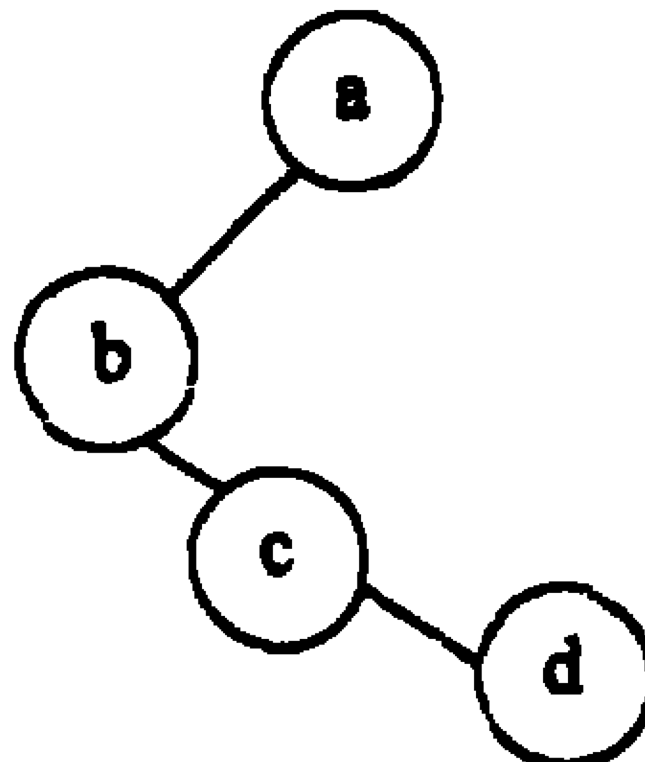
الفصل السابع

الشجرة الثنائية المكانية

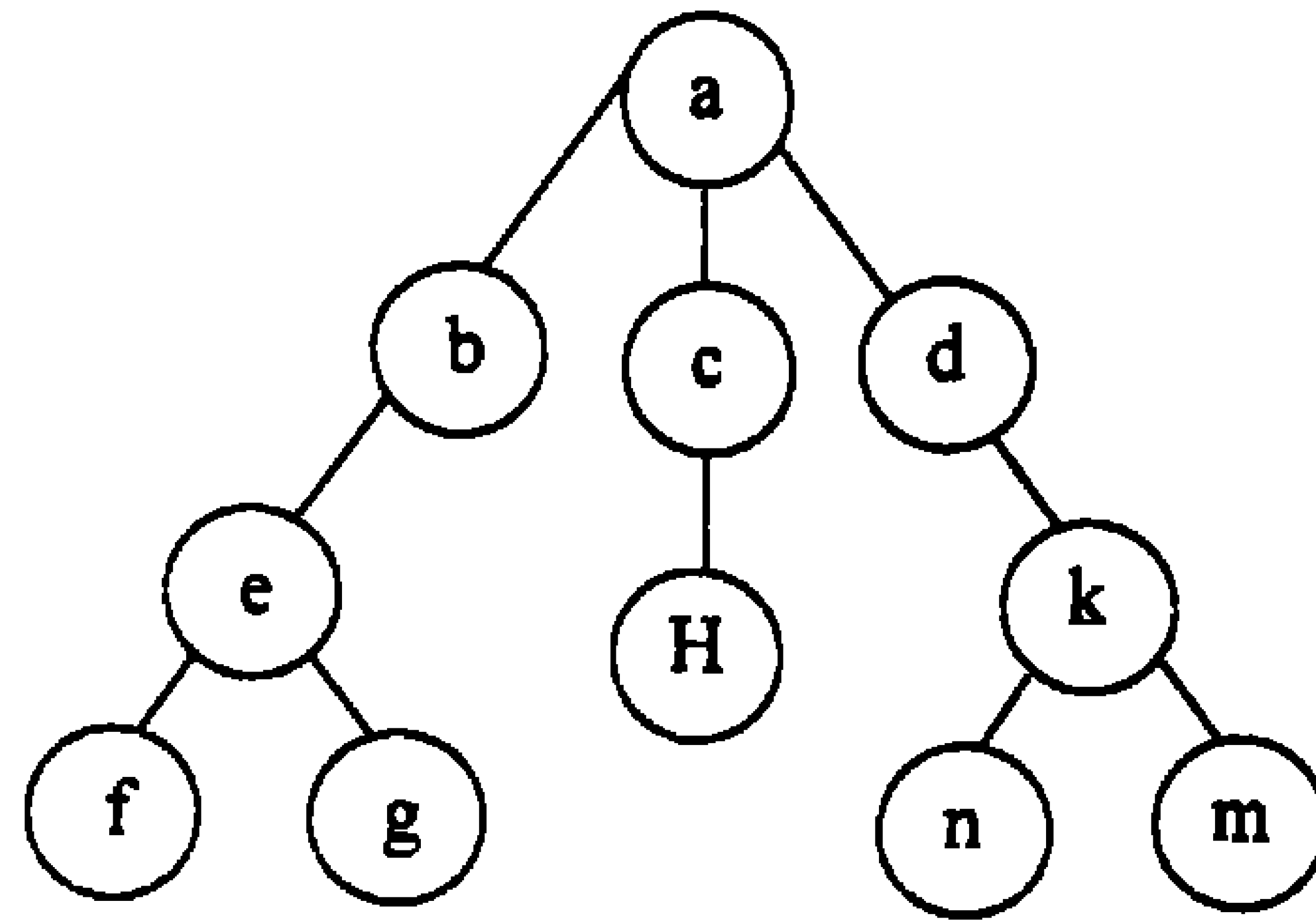
الشجرة الثنائية المكانية هي شجرة ثنائية تأتي من شجرة غير ثنائية. فإذا كانت لدينا الرغبة في قراءة محتويات شجرة غير ثنائية فإننا نحولها إلى شجرة ثنائية مكانية ثم نقرأها بالطريقة المطلوبة. عملية التحويل تكون بالنسبة للشجرة المرسومة بالطريقة الهندسية المعيارية كالتالي: نعتبر أول فرع من اليسار لأي دائرة هو الابن الأكبر للشخص في تلك الدائرة. أما بقية الفروع فتعتبر الأخوة الأصغر للأخ الكبير. يكون جذر الشجرة الثنائية المكانية هو نفس جذر الشجرة العادية. نفرع دوائر الشجرة الثنائية المكانية بحيث يتفرع الابن الكبير دائماً إلى يسار أبيه ويتفرع أخوة الأخ الكبير جميعهم إلى يمينه بنفس التسلسل الوارد في الشجرة العادية. مثلاً الشجرة



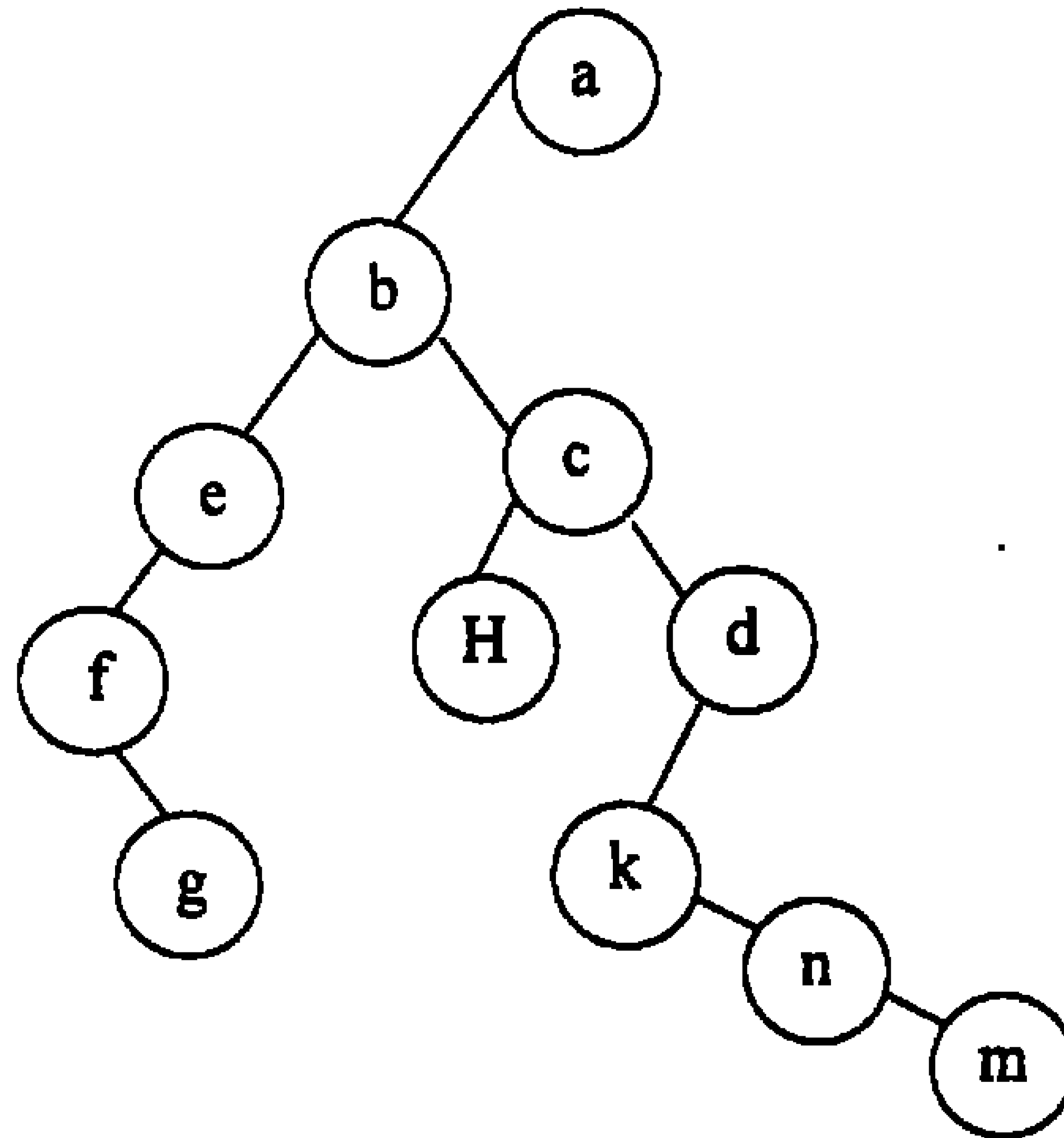
تتحول إلى الشجرة التالية:



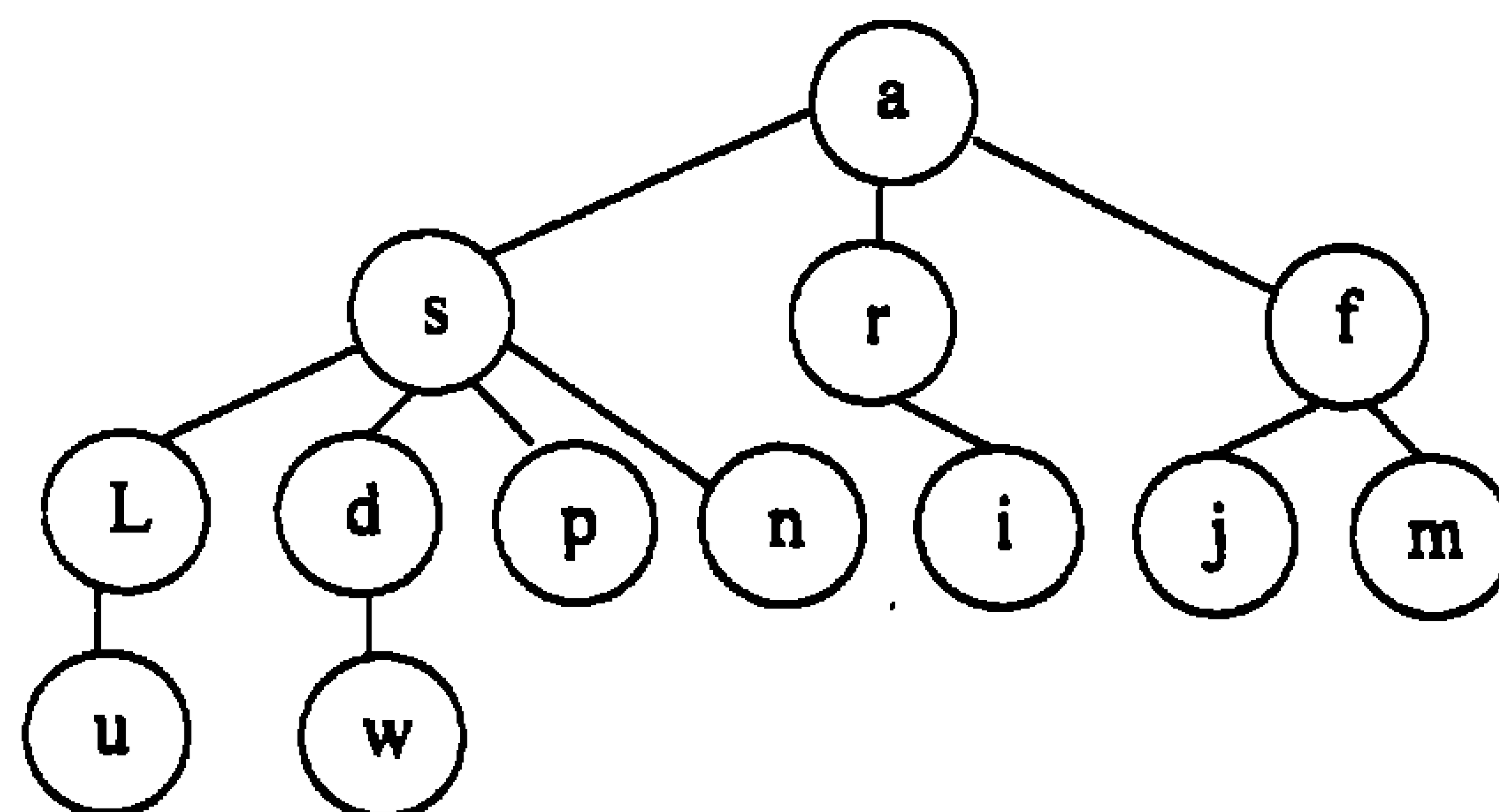
كمثال آخر لننظر إلى الشجرة التالية:



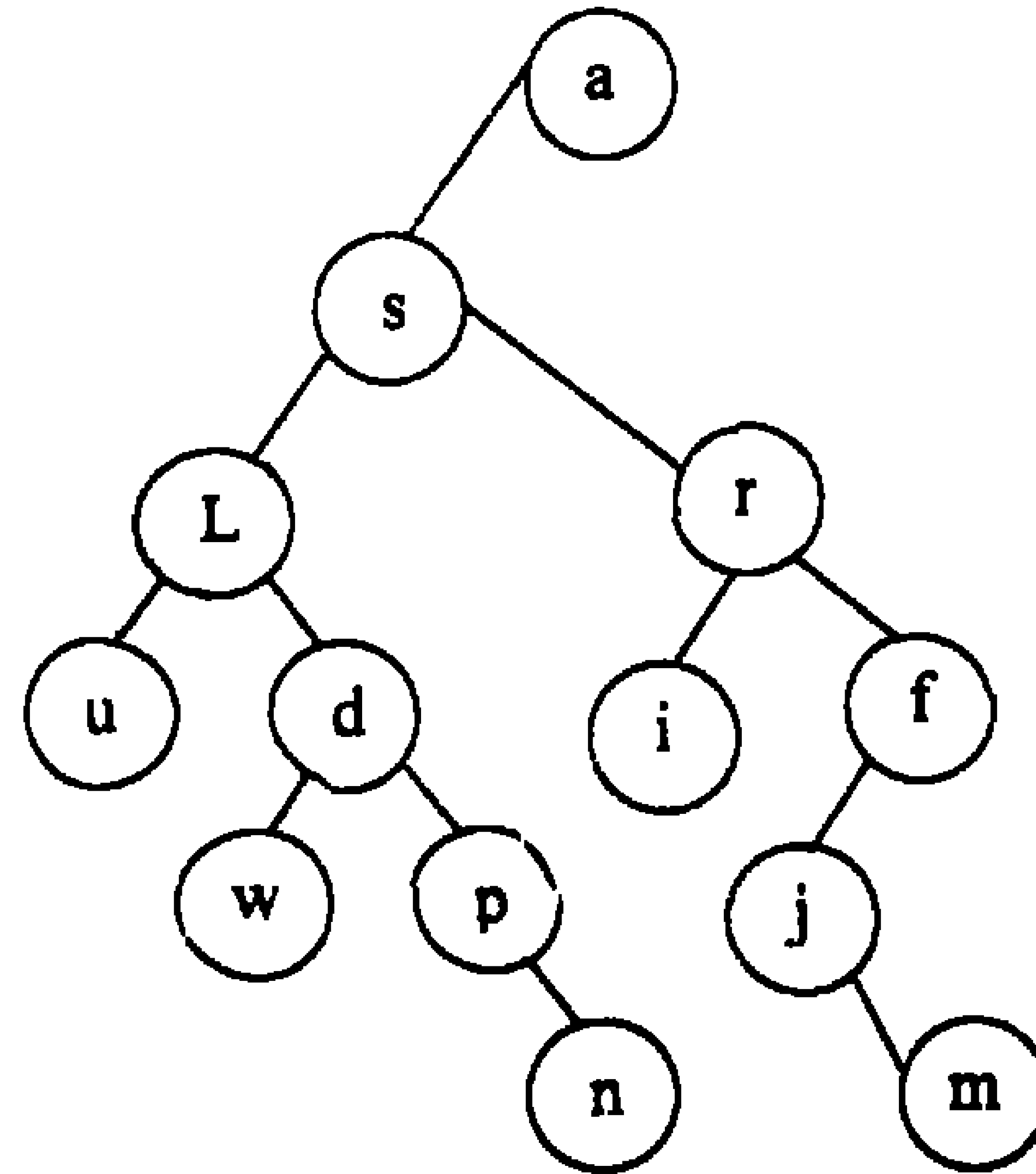
هذه الشجرة تتحول إلى (لاحظ أن H يعتبر الابن الوحيد وبالتالي الأكبر لأبيه c).



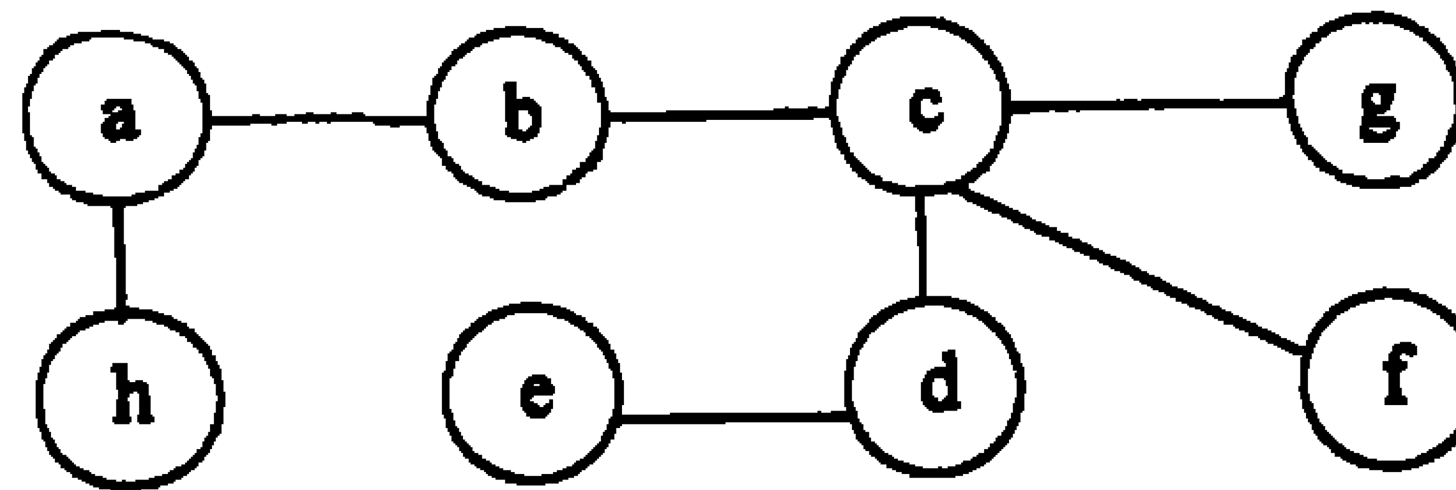
مثـــال: حول الشجرة التالية إلى شجرة ثنائية مكانية:



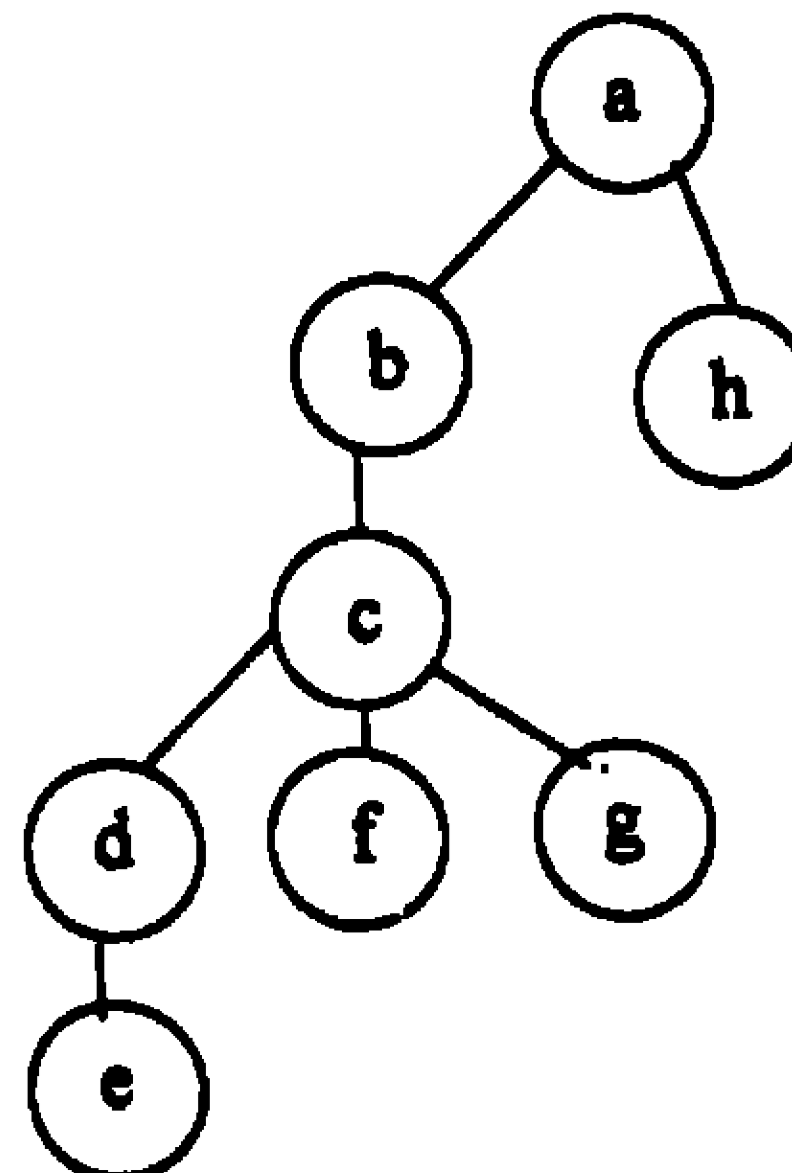
<u>الحل</u>: الشجرة هي



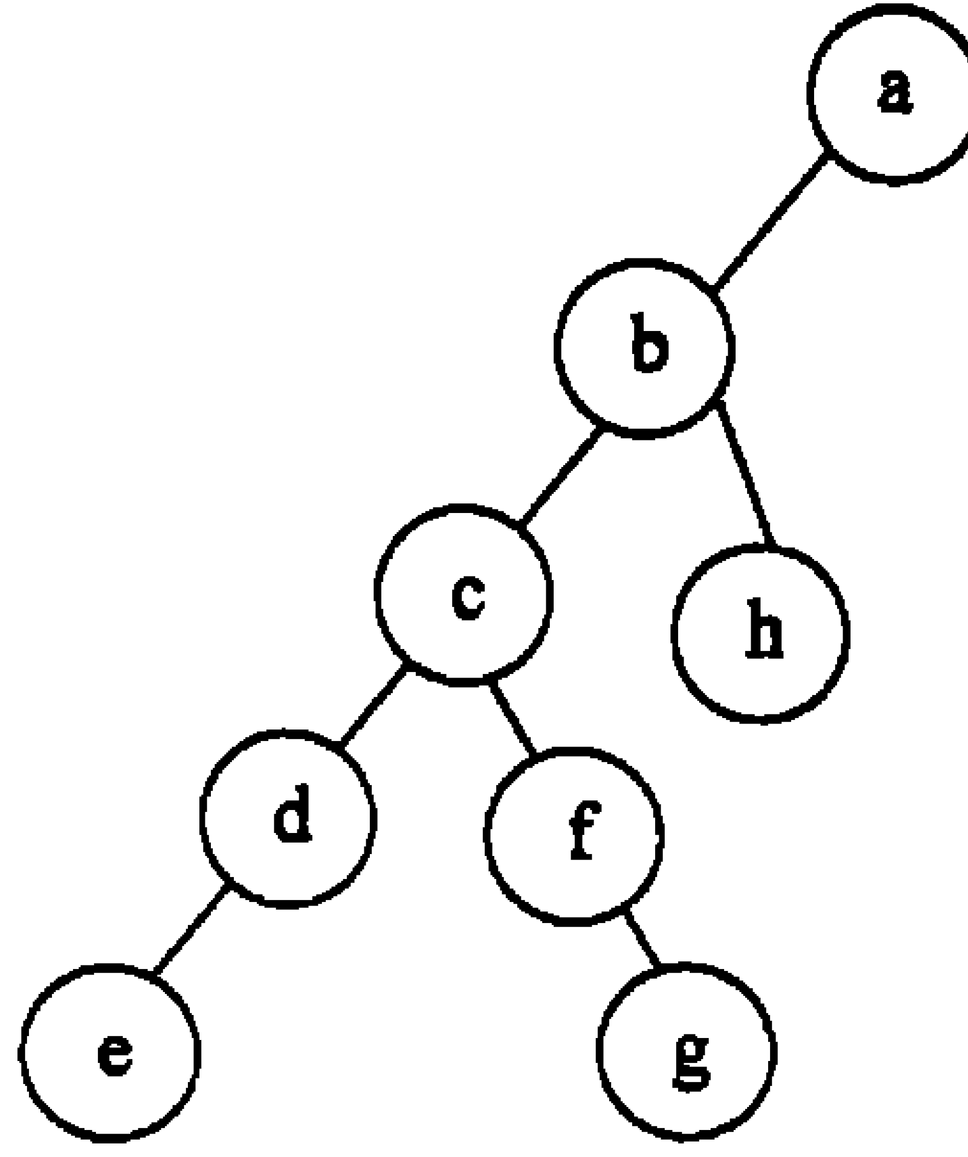
إذا لم تكن الشجرة في الصورة الهندسية المعيارية، فإنه ينبغي تحويلها إلى شجرة في الصورة المعيارية باستخدام طريقة البحث في العرض أو الطول (الجواب هو نفسه في هذه الحالة عند استخدام الطريقتين). ثم يتم تحويلها كما شاهدنا إلى شجرة ثنائية مكانية. مثلاً: الشجرة



تتحول أولاً إلى



وبالتالي نحصل على الجواب المطلوب كالتالي:



الفصل الثامن

الأشجار ذات العمليات الحسابية

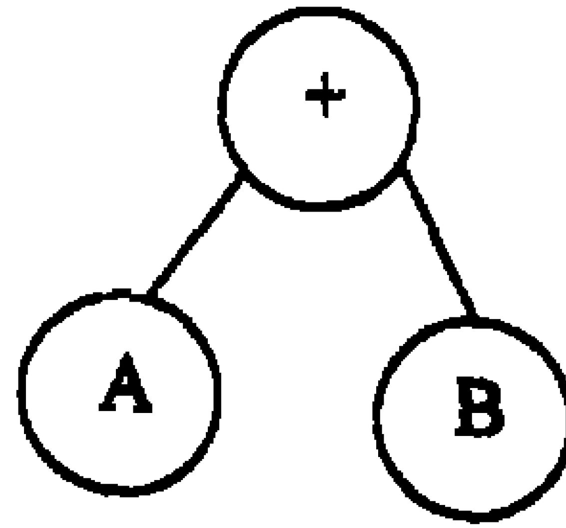
هذا نوع خاص من الأشجار الثنائية تتحقق فيه الشروط التالية:

١- الدوائر تحتوي على حروف وبعض العمليات الحسابية الأربعة الرئيسية،

٢- كل دائرة فيها عملية حسابية تتفرع بالضبط إلى فرعين،

٣- كل دائرة فيها حرف لا تتفرع.

كمثال بسيط على هذه الأشجار لدينا الشجرة التالية:



لو قرأنا هذه الشجرة باستخدام الطريقة الوسطية لحصلنا على المصطلح

A + B

إذاً، الشجرة السابقة ترمز إلى عملية جمع الحرفين (المجهولين) A و B. لكن، توجد قراءات أخرى للشجرة. القراءة المقدمة تعطي المصطلح التالي:

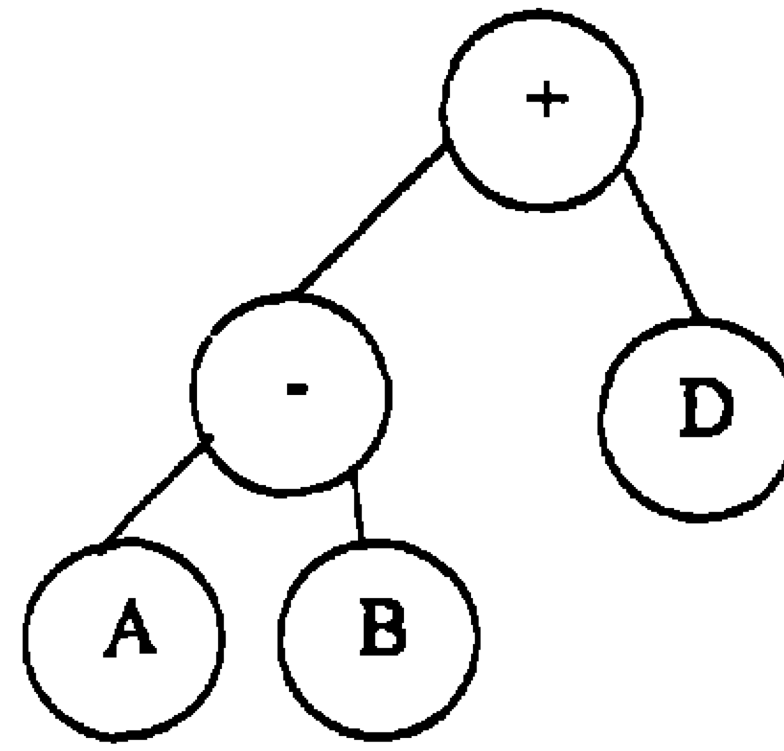
+ A B

هذا مصطلح يرمز إلى عملية الجمع ولكن بشكل غير اعتيادي؛ فهو يبدأ بتحديد العملية ثم المجهولين الذين ستتم عليهما العملية. بما أن هذا المصطلح يتشكل عند قراءة الشجرة بالطريقة المقدّمة سندعوه المصطلح المقدم لعملية جمع A مع B. كذلك المصطلح

A B +

الذي ينشأ من خلال القراءة المؤجلة يدعى بالمصطلح المؤجل لعملية الجمع بين A و B. هذا النوع من المصطلحات يواجهنا عند تصميم الحاسوب، إذ أن إدخال العملية إلى وحدة الحساب داخل الحاسوب تتم بإدخال المجهولان أولاً ثم العملية ثانياً. لذا، سنصب اهتمامنا في بقية هذا الباب على دراسة المصطلحات المؤجلة وعلاقتها مع المصطلحات الاعتيادية التي تدعى على غرار ما سبق بالمصطلحات الوسطية.

لو نظرنا إلى الشجرة التالية:



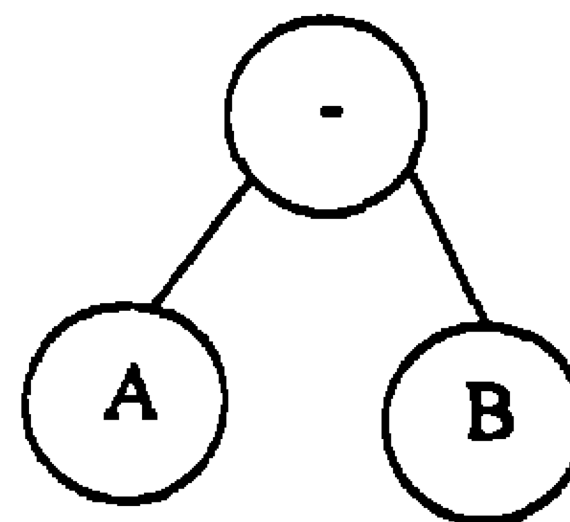
هذه شجرة ذات عمليات حسابية وتعبّر عن المصطلح

A - B + D

كما تؤكد لنا القراءة الوسطية. القراءة المؤجلة تعطي المصطلح

A B - D +

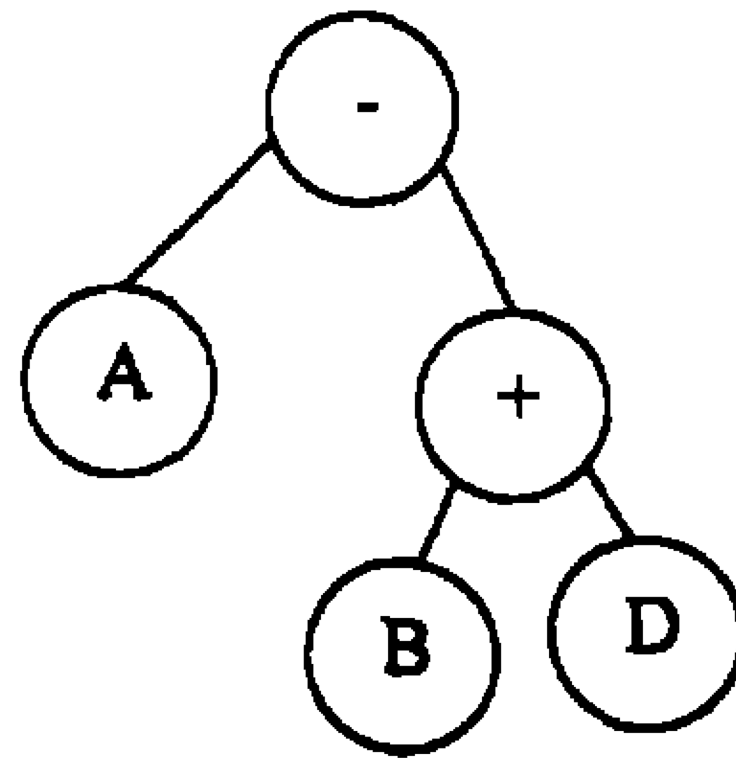
نرى عند القراءة من اليسار إلى اليمين أنه ستتم عملية طرح بين A و B أولاً ثم تأتي D لكي تجمع إلى حاصل الطرح. أي سيتم تنفيذ الطرح أولاً والجمع ثانياً. عند تدقيق النظر نرى أن الطرح قد جاء في اطار شجرة داخل الشجرة الأصلية وهي



لتأكيد الأولويات سنعمد إلى استخدام الأقواس في داخل المصطلح الوسطي فنكتبه كالتالي:

(A – B) + D

ونراعي من الآن فصاعداً أن تتحول كل شجرة جزئية داخل الشجرة الأصلية إلى قوس يحيط بالعملية كاملة. في ظل هذا الفهم تعني لنا الشجرة



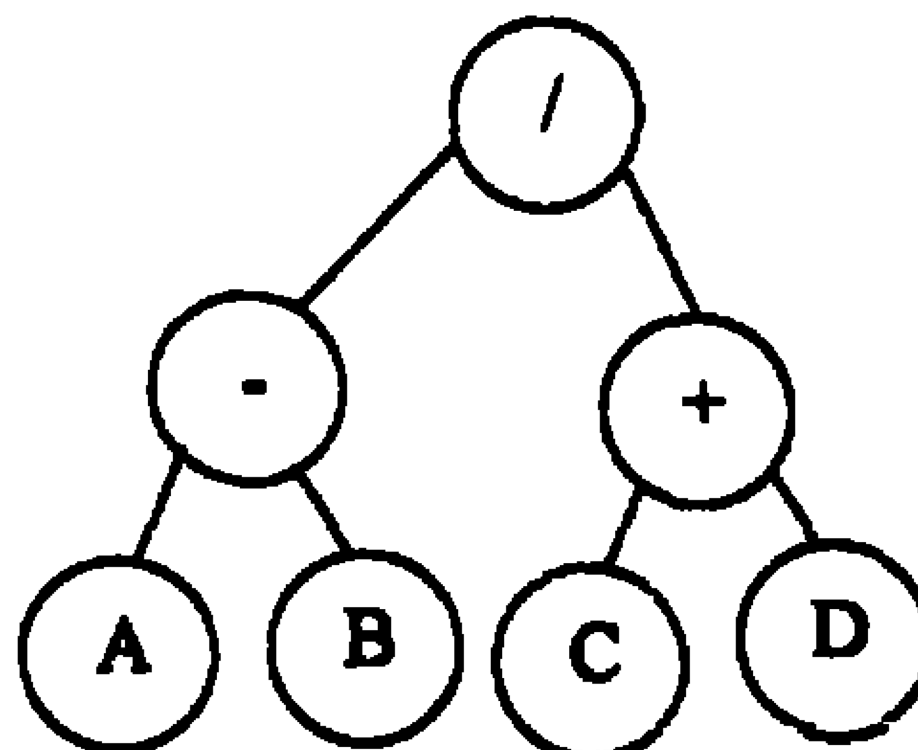
المصطلح الوسطي

A - (B + D)

لو قرأنا الشجرة بالطريقة المؤجلة لوجدنا أن هذا المصطلح الوسطي يستبدل بـالمصطلح المؤجل التالي:

A B D + -

للتأكد من ذلك نحتكم للفهم: المصطلح المؤجل يقرأ من اليسار إلى اليمين بحيث تعود كل عملية حسابية على آخر مجهولين وردا قبل العملية وقد يأتي حاصل عملية حسابية بدل المجهول. في المصطلح السابق ستتم عملية جمع D إلى B، ثم نطرح حاصل عملية الجمع من A. هذا تماماً ما يدل عليه المصطلح الوسطي باستخدام القوس. لو نظرنا إلى الشجرة التالية:



لكان لدينا المصطلح الوسطي

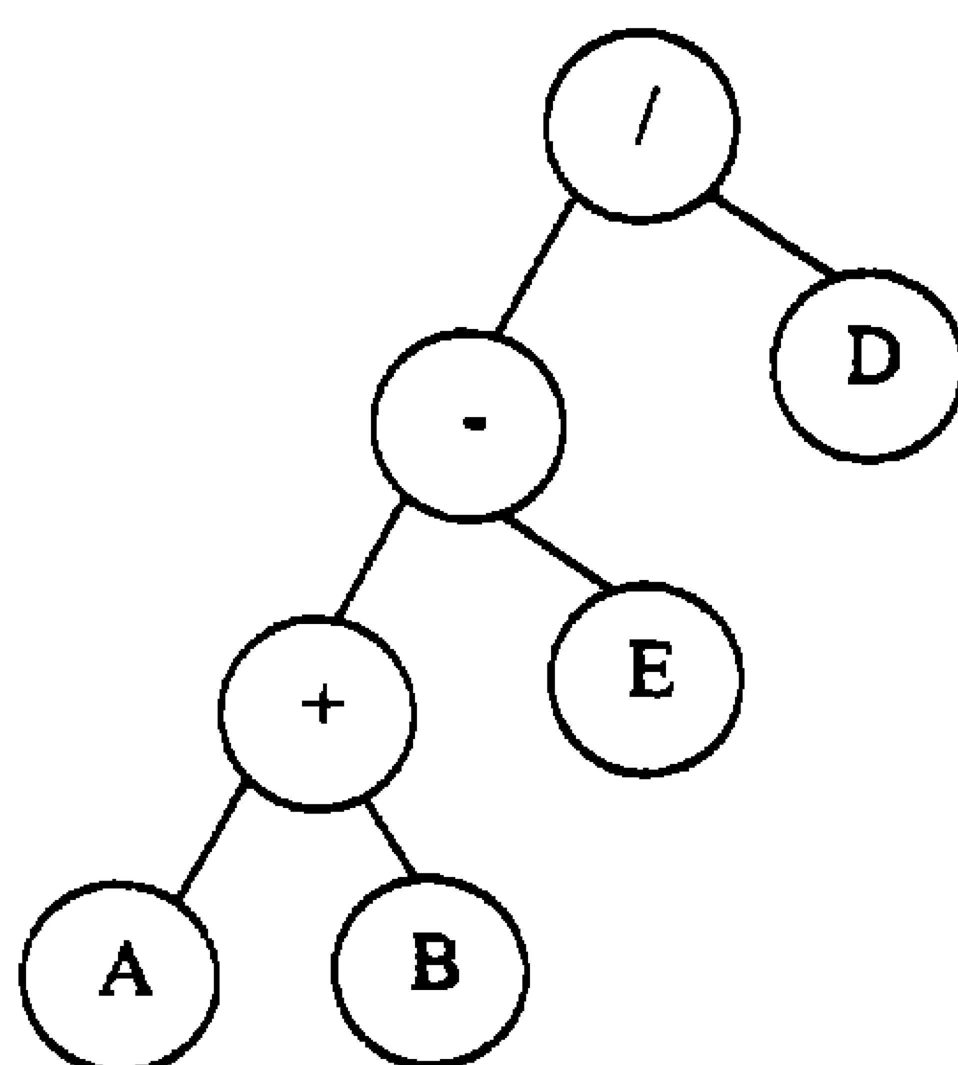
(A – B) / (C + D)

والمصطلح المؤجل المكافئ

A B – C D + /

لاحظ أن كلا المصطلحين يدل على قسمة حاصل طرح B من A على حاصل جمع D إلى C.

في حال وجود عدة أشجار جزئية. داخل الشجرة الأصلية نستخدم أقواس متداخلة بحيث يكون أول قوس فيها عادي والأخرى أقواس معقوفة. مثلاً،



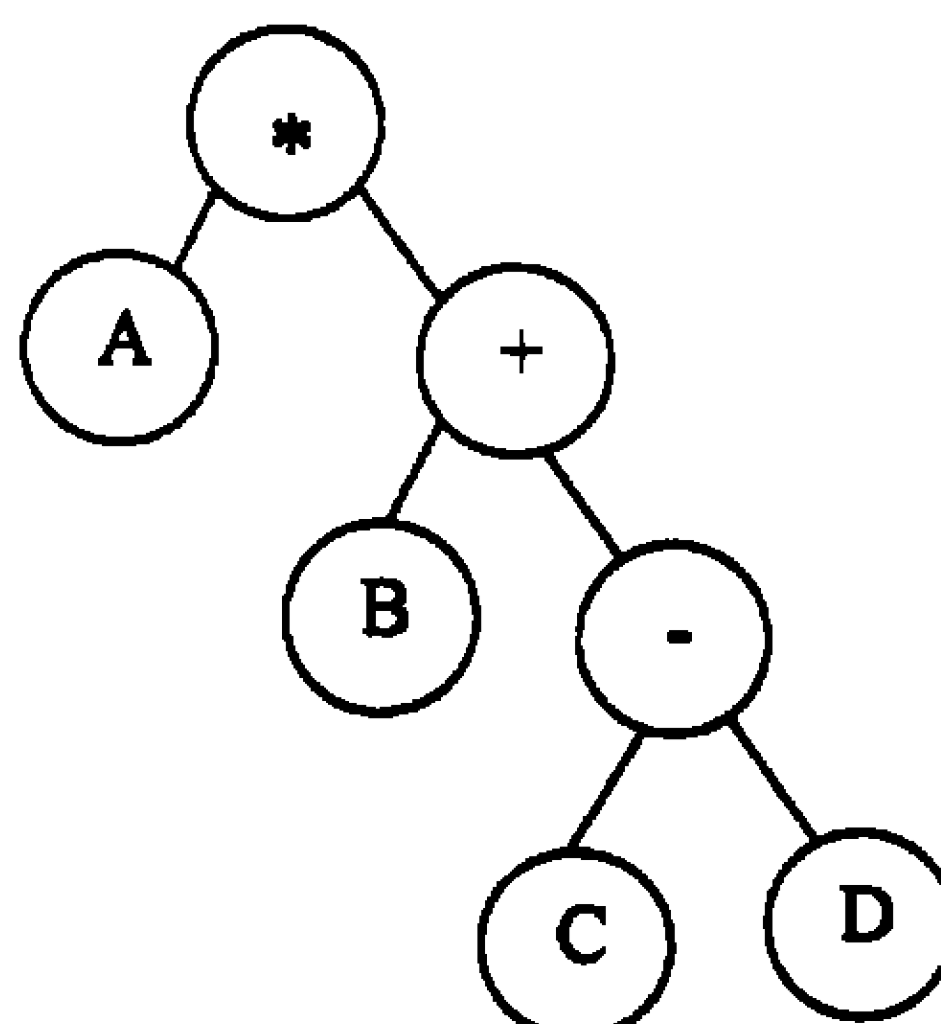
هذه الشجرة ترمز إلى المصطلح

[(A + B) - E] / D

والمصطلح المؤجل الرديف هو

AB + E - D /

هذا المصطلح معناه قسمة حاصل جمع B إلى A مطروح منه E على D. أما الشجرة



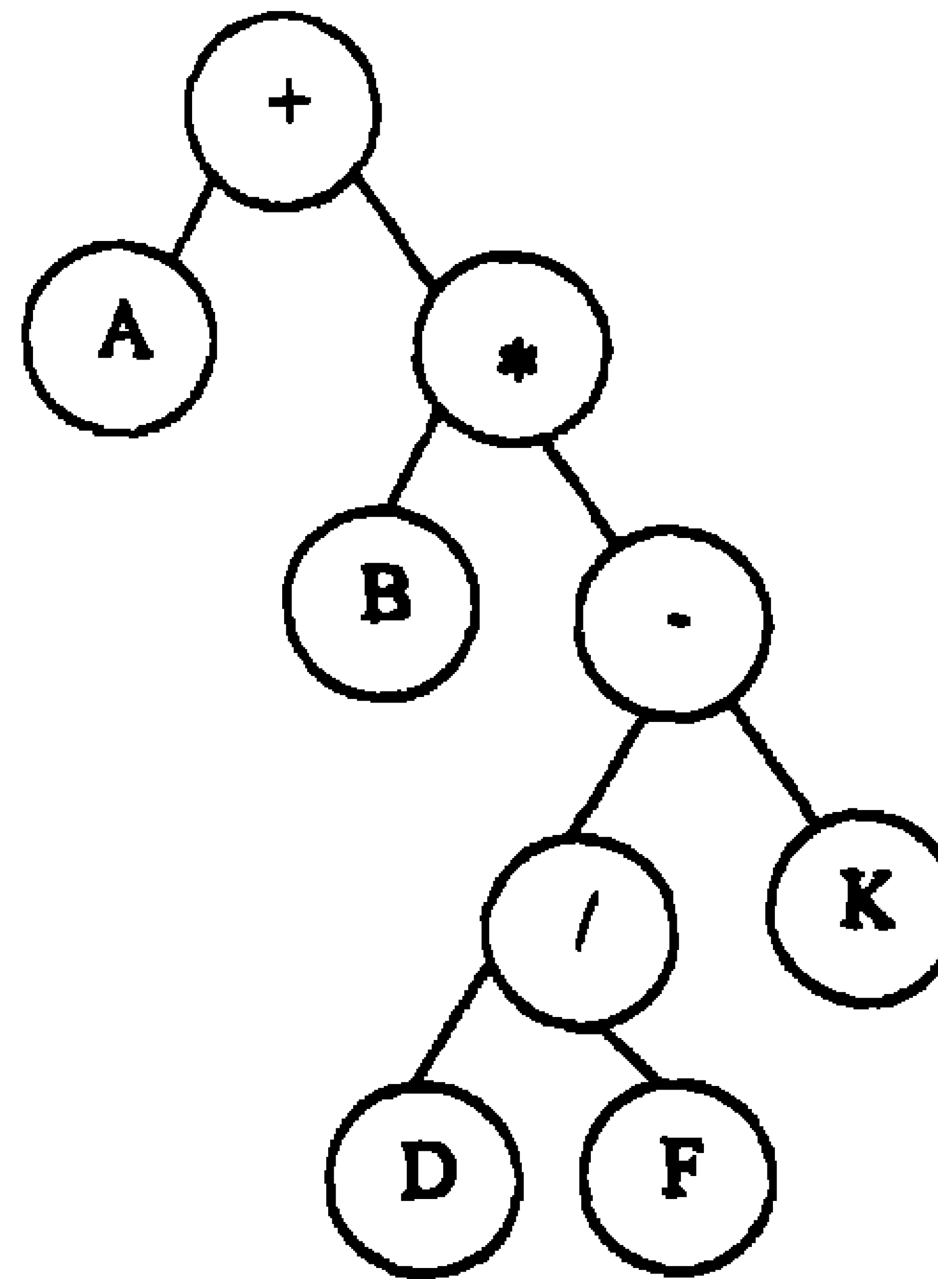
فتعبر عن المصطلحين:

A * [B + (C – D)]
A B C D – + *

لو دققنا النظر في المصطلحات الوسطية السابقة لوجدنا أن عدد الأقواس فيها أقل من عدد العمليات بواحد وأقل من عدد المجاهيل بـاثنين. في هـذه الحالـة تكـون الأولويات لتنفيذ العمليات الحسابية مرتبة تماماً دون التباس ويطلق على المصطلح حينئذ لقب المصطلح كامل الأقواس. مثلاً، المصطلح التالي:

A + [B * [(D/F) – K]]

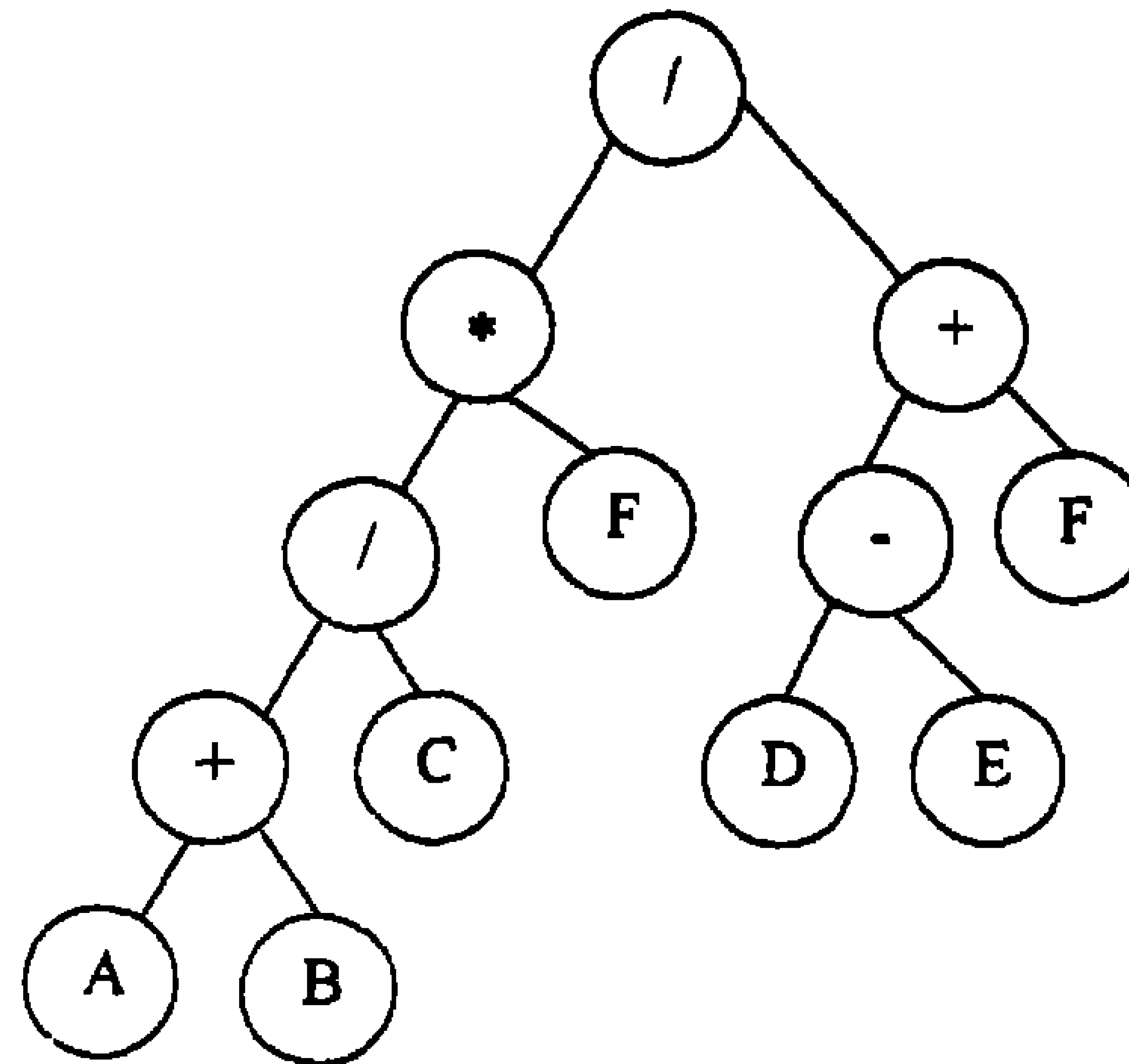
هو مصطلح كامل الأقواس بحيث ترتيب العمليات هو: قسمة D على F ثم طـرح K من الناتج وبعدها ضرب كامل النتيجة في B وأخيراً الجمع إلى A. هـذا المصطلـح يتحول إلى الشجرة التالية كما عرفنا:



كمثال آخر على تحويل المصطلح إلى شجرة لننظر إلى مصطلح كامل الأقواس التالي:

[[(A+B) / C] * F] / [(D – E) + F]

الشجرة هي:



تمارين: حول المصطلحات التالية إلى شجرة:

1) (A + B) * [[C + (D – E)] / F]

2) [A + [[B * (D + E)] / N]] / [R / (B*Y)]

الفصل التاسع

المصطلحات المؤجلة

المصطلح المؤجل كما ورد سابقاً هو مجموعة حروف وعمليات حسابية مرتبة بحيث تتوافر فيه الصفات التالية:

١- يبدأ المصطلح بحرفين على الأقل،

٢- عدد الحروف يكون اكثر من عدد العمليات بواحد،

٣- ينتهي المصطلح بعملية حسابية .

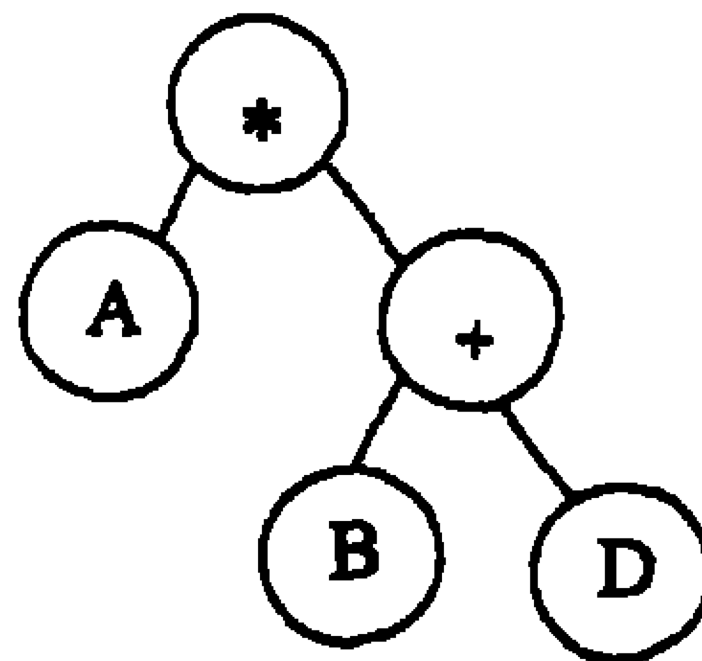
المصطلح المؤجل الذي له معنى رياضي هو الذي يعطي فهمه من اليسار إلى اليمين بطريقة الرجوع إلى الخلف كما فعلنا سابقاً إيضاحاً لسير العمل وكيفية تنفيذ العمليات على المجاهيل. هذا الفهم يطابق حينها فهم مصطلح كامل الأقواس، وبالتالي يمكن التعبير عن المصطلح المؤجل من خلال شجرة ذات عمليات حسابية. مثلاً، المصطلح

ABD + *

يفهم على أنه جمع D إلى B ثم ضرب الناتج في A. أي، بمعنى آخر هو المصطلح

A * (B + D)

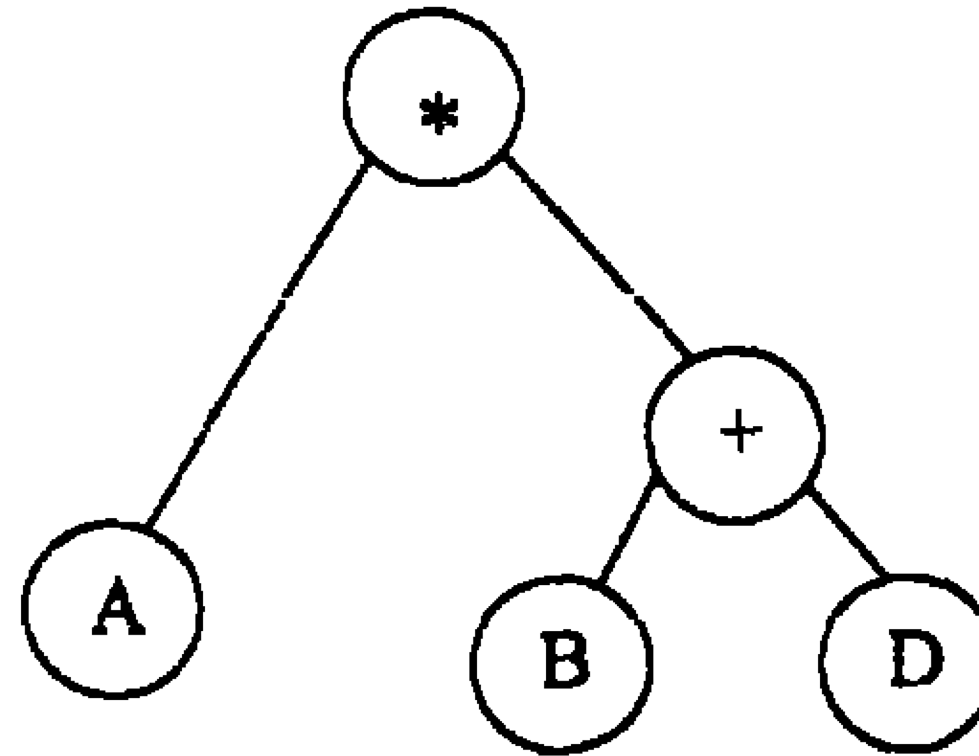
والشجرة هي



عادة تكون خطوة إيجاد الشجرة هي الخطوة الأولى في تحويل المصطلح المؤجل إلى مصطلح كامل الأقواس. لحساب الشجرة سنعمد إلى رسم شجرة أولية ثم تعديل شكلها الهندسي بحيث تصبح شجرة ثنائية عادية. لفهم ذلك سنأخذ المصطلح

A B D + *

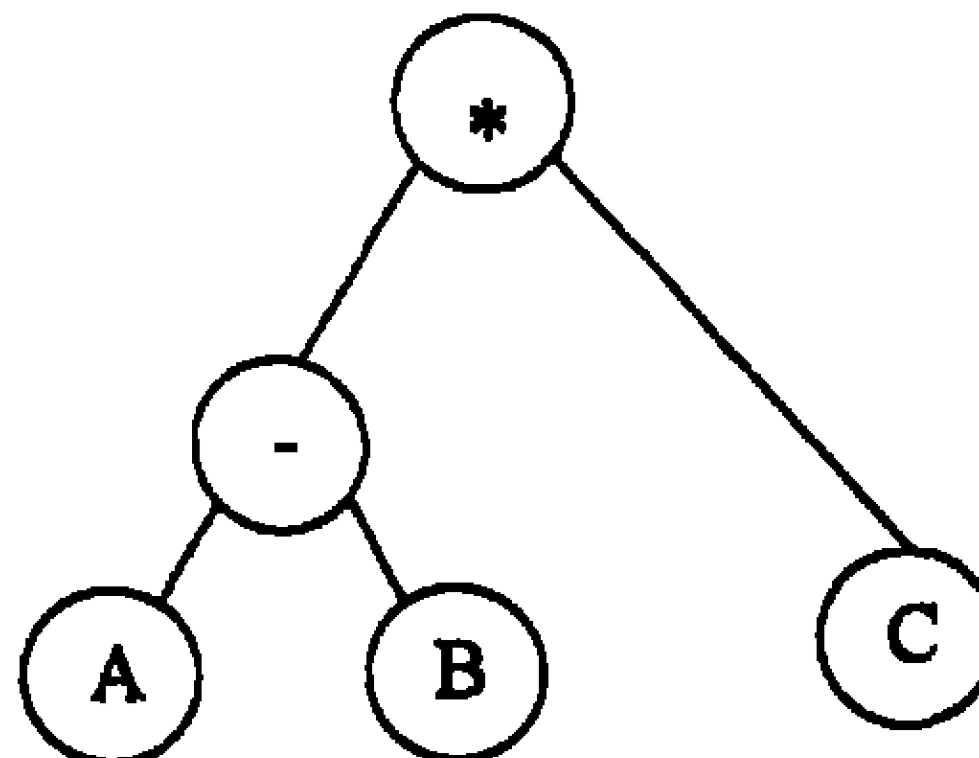
ونطبق عليه الفكرة. بما أنه توجد ثلاثة مجاهيل نترك سطرين فارغين للعمليات ونبدأ بكتابة المجاهيل في السطر الثالث. ثم نقوم بوصل آخر دائرتين مع أول عملية حسابية تأتي بحيث تكون العملية في سطر أعلى من سطر المجاهيل. جميع العمليات اللاحقة ستربط آخر دوائر أو أشجار بحيث تأتي دائماً أعلى من مستوى ما تربط معاً. أي بالنسبة للمصطلح الذي ندرسه يكون الوضع كالتالي:



عند إعادة رسم الشجرة بحيث تكون الأضلاع لها نفس الطول نحصل على الشجرة المطلوبة. كمثال آخر لننظر إلى المصطلح المؤجل التالي:

A B - C *

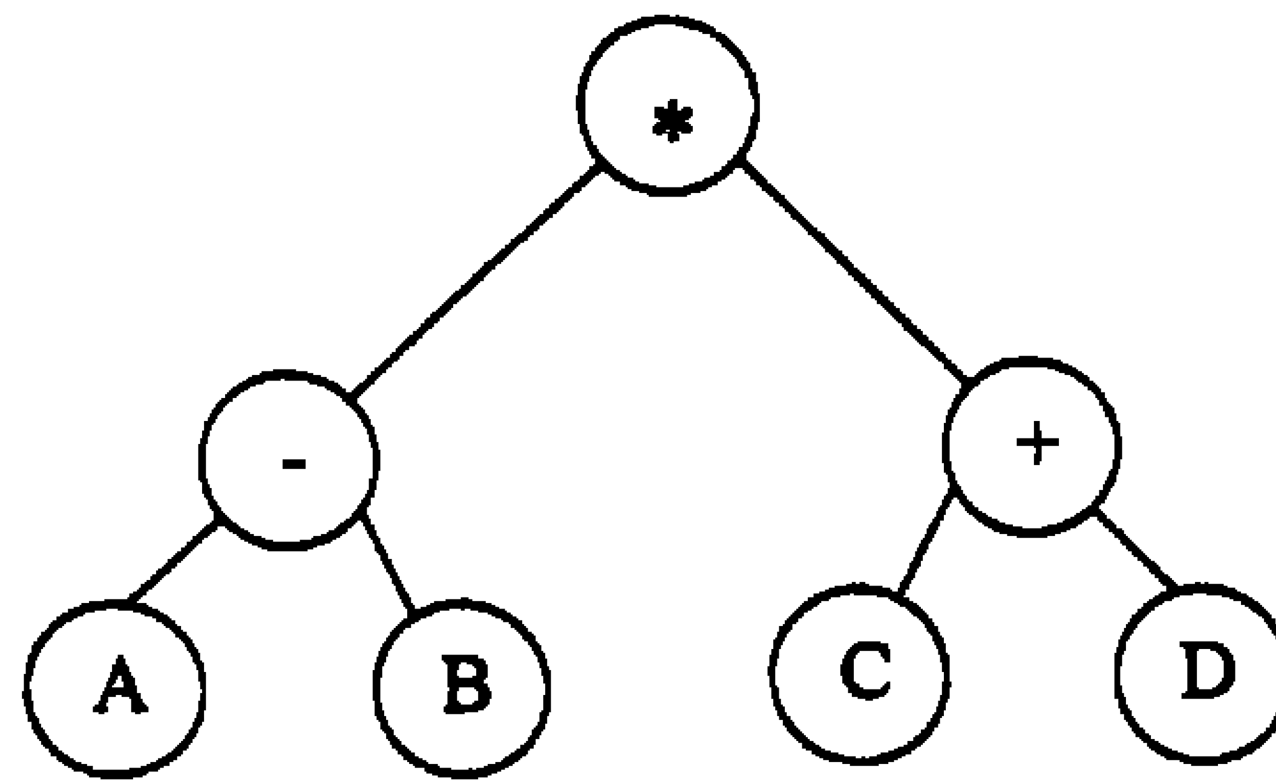
الشجرة تكون في أولى مراحلها كالتالي:



لاحظ أننا لا نكتب جميع المجاهيل دفعة واحدة على السطر الأخير وإنما نبـــدأ بكتابـــة المجاهيل الأولى حتى قدوم أول عملية. تربط هذه العملية كما أسلفنا آخر جزئين معاً ثم نكمل كتابة المجاهيل ونقف عند قدوم أية عملية. إذا جاءت أكثر من عمليـــة نقـــوم بكتابتها مستخدمين نفس التسلسل من الأسفل إلى الأعلى بحيث تربط كـــل واحـــدة منها سابقتها مع ما يسبق شجرة العملية السابقة. مثلاً، المصطلح

AB - CD+*

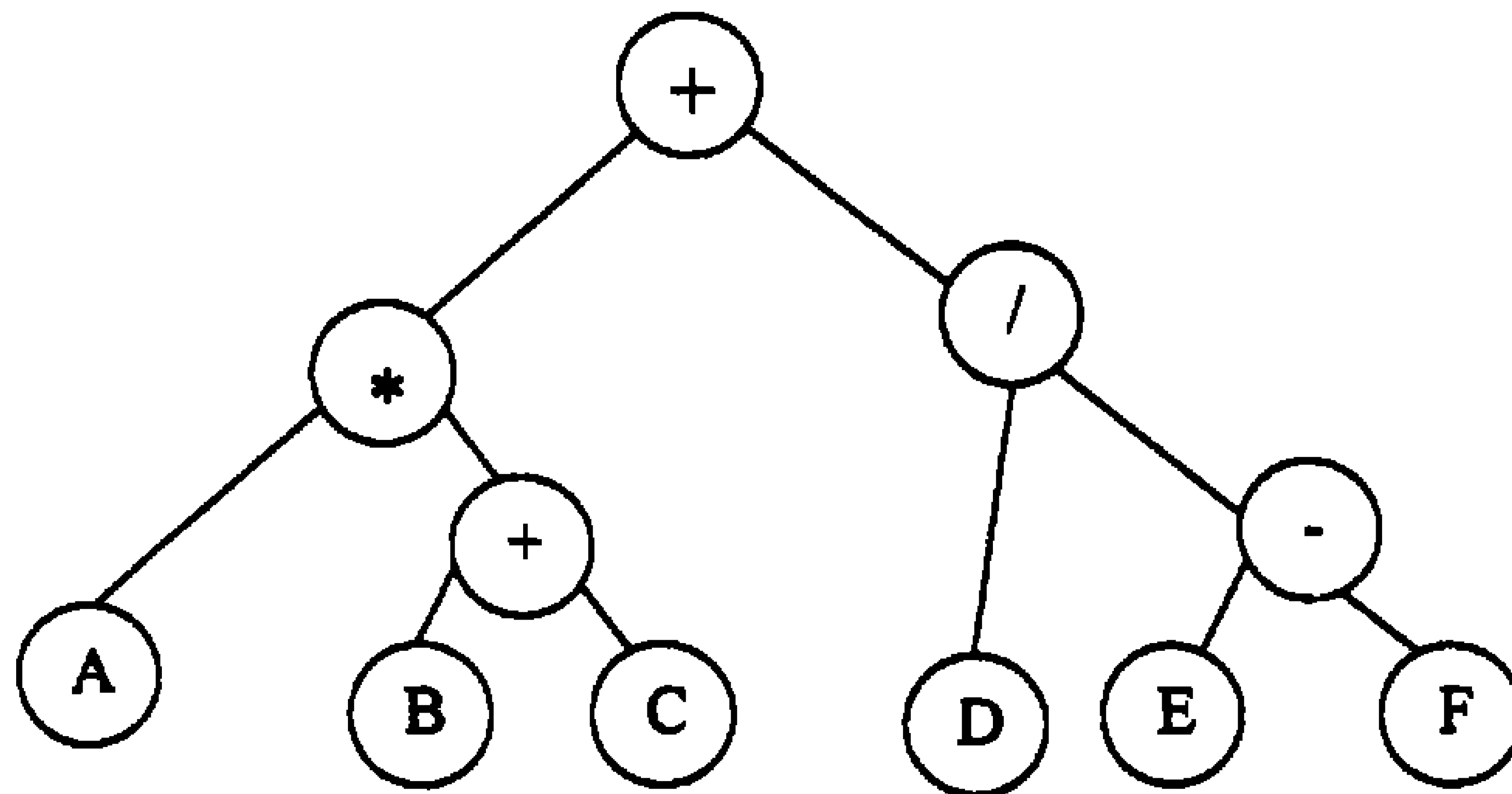
يحول إلى الشجرة التالية:



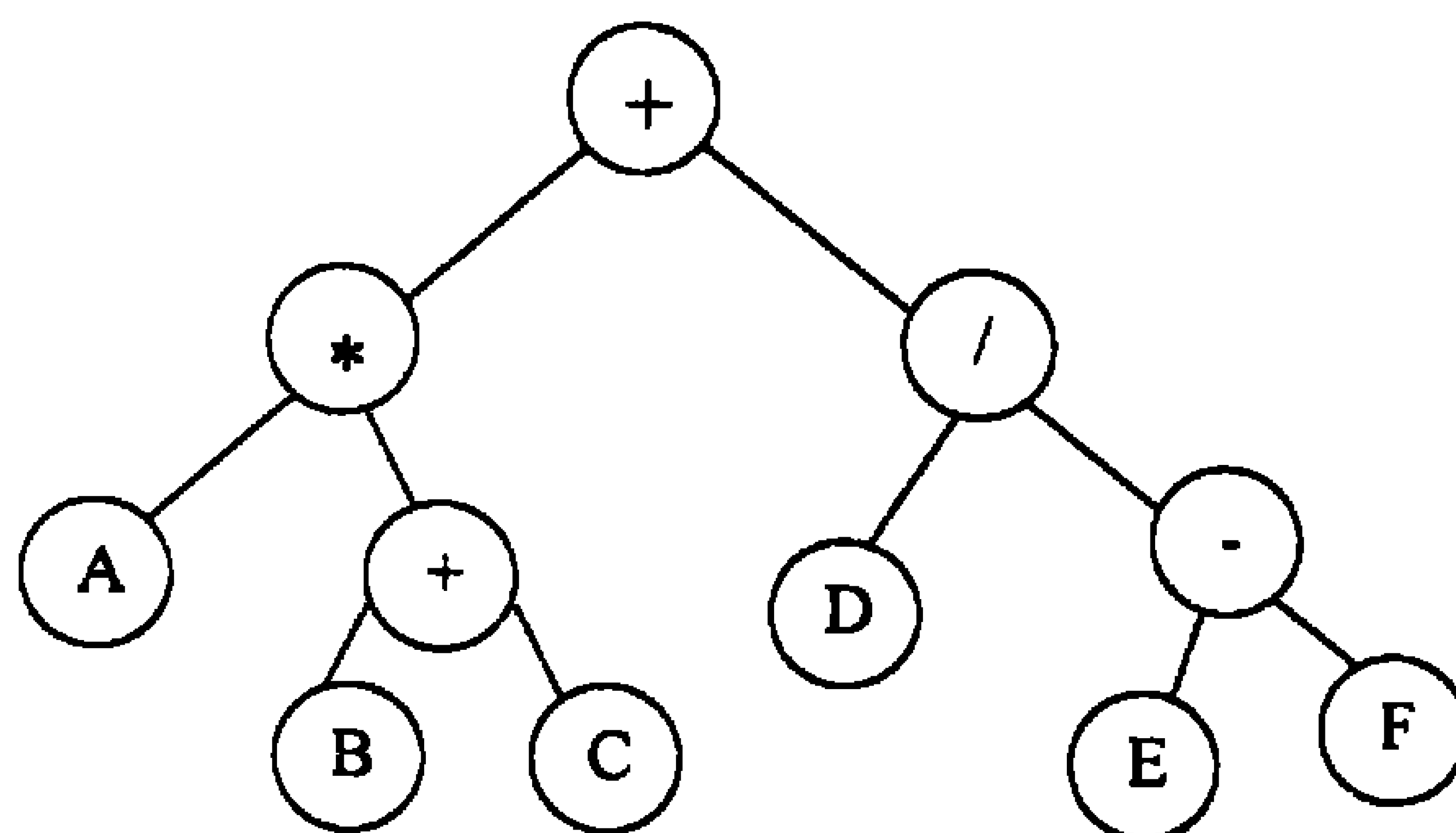
والمصطلح

ABC + * DEF-/+

يعطي مبدئياً الشجرة التالية:



إذا أردنا تحويل المصطلح الأخير إلى مصطلح كامل الأقواس، فإننا نكتب الشجرة في القياس الطبيعي ونحولها إلى مصطلح كامل الأقواس. أي الشجرة السابقة يعاد رسمها كالتالي:



وتعطي بدورها المصطلح التالي:

[A * (B + C)] + [D / (E - F)]

مثال: حول المصطلح التالي إلى مصطلح كامل الأقواس:

AB - D * EF - + C /

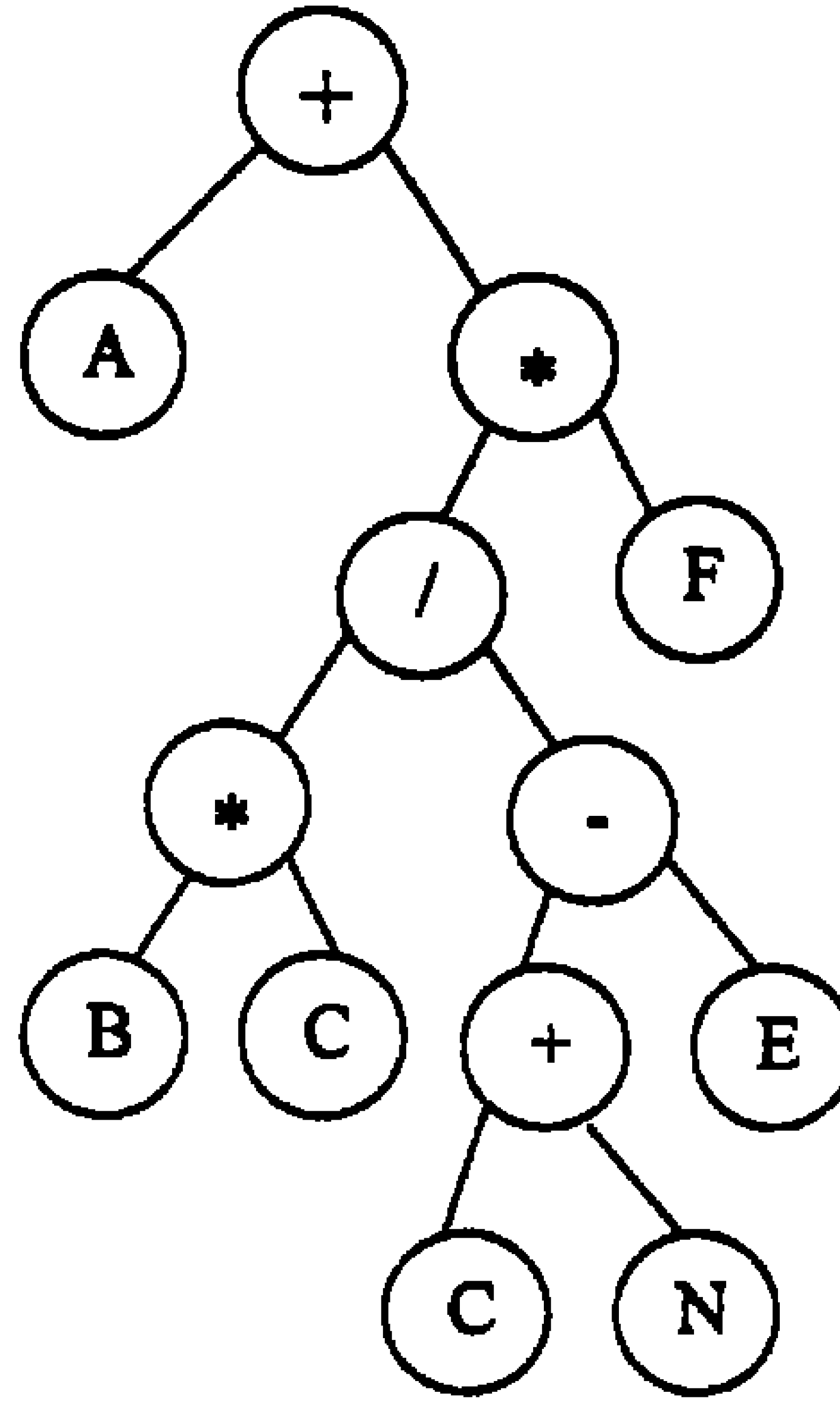
الجواب: بعد التحويل إلى شجرة نحصل على

[[(A - B) * D] + (E - F)] / C

مثال: حول المصطلح التالي إلى مصطلح كامل الأقواس:

A B C * C N + E - / F * +

الجواب: لا يضر تكرار حرف C حيث يأخذ كل حرف دائرة خاصة به وتكون الشجرة كالتالي:



والمصطلح كامل الأقواس المكافئ هو

A + [[(B * C) / [(C+N) – E]] * F]

تمارين: حول المصطلحات التالية إلى مصطلحات كاملة الأقواس:

---

1) A B C D E F + – * / +

2) A B C + D E F – * N + / +

3) A B * D E N + – F K L M + – * / +

الفصل العاشر

المصطلحات ناقصة الأقواس

المصطلح ناقص الأقواس هو مصطلح وسيطي يقل فيه عدد الأقواس عن عدد العمليات بأكثر من واحد. للحصول على مصطلح كامل الأقواس من مصطلح ناقص الأقواس يجب مراعاة بعض القواعد البسيطة التي تتلخص في:

١- العمليتان ضرب وقسمة عمليات قوية بينما العمليتان جمع وطرح عمليات ضعيفة.

٢- إذا أتى بين ثلاثة مقادير عملية ضعيفة وأخرى قوية، الأولوية تعطي للعملية القوية.

٣- إذا أتى بين ثلاثة مقادير عمليتان لهما نفس القوة، فإن الأولوية تعطي للعملية الأولى من اليسار إلى اليمين.

كأمثلة توضيحية سننظر إلى المصطلحات التالية:

A - B * C

A + B - C

A * B / C * D - E

المصطلح الأول يتحول إلى

A - (B * C)

والمصطلح الثاني يفهم على أنه

(A + B) - C

أما المصطلح الأخير فيتحول مبدئياً إلى

(A * B) / C * D - E

هنا نعتبر حاصل ضرب B في A مقداراً واحداً وبناءاً عليه نحصل على المصطلح

[(A * B) / C] * D - E

الآن يجب وضع قوس واحد وسيكون معقوفاً لأنه سيحوي بداخله مقداراً على صورة قوس آخر. أي المصطلح الثالث هو

[[(A * B) / C] * D] - E

قد يكتب المرء أحياناً بعض الأقواس داخل المصطلح الوسطي لكي يجبر الآخرين على تنفيذ بعض العمليات قبل غيرها بخلاف ما تنص عليه التعليمات. في هذه الحالة نتعامل مع القوس الموجود كمقدار ثابت نكمل وضع الأقواس داخله وخارجه. مثلاً، المصطلح التالي:

[A * B – C + N] / (E – F)

يتحول إلى

[[(A * B) – C] + N] / (E – F)

والمصطلح

[A / B – N / K] * M + S / R

يتحول إلى

[[[(A/ B) – (N / K)] * M] + (S/R)

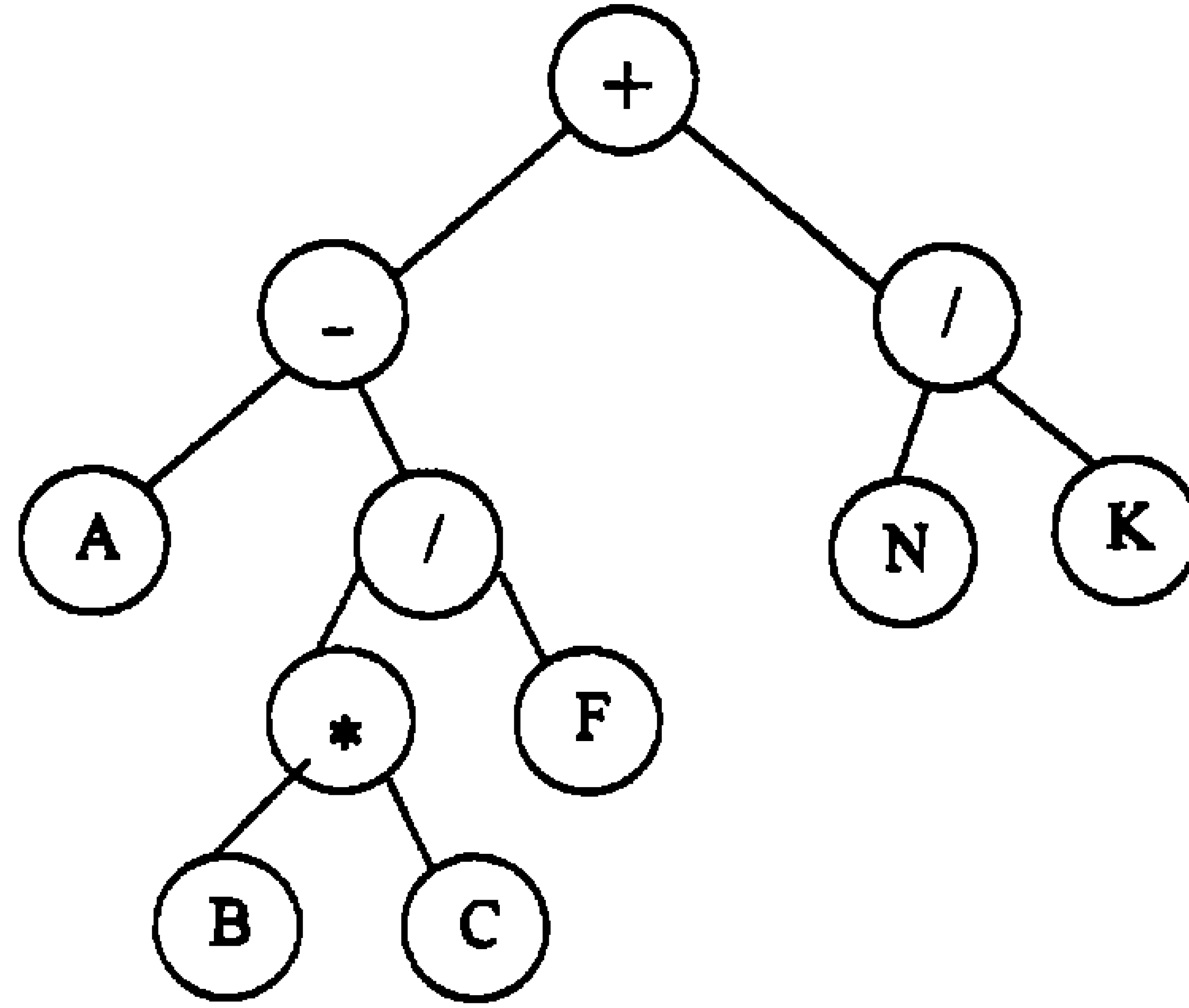
إذا كتبنا للحاسوب مصطلحاً ناقص الأقواس، فإنه يحوله إلى مصطلح مؤجل بهدف حسابه داخل وحدة الحساب الرقمي. عملية التحويل هذه يمكن متابعتها عن طريق التحويل من مصطلح ناقص الأقواس إلى مصطلح كامل الأقواس ثم الانتقال إلى رسم الشجرة فالقراءة بالطريقة المؤجلة. مثلاً، المصطلح التالي:

A – B * C / F + N / K

يتحول أولاً إلى

[A – [(B * C)/ F]] + (N/K)

وتكون الشجرة هي



وبالتالي الصيغة المكافئة للمصطلح الأصلي بلغة المصطلحات المؤجلة تكون

A B C * F/ - N K/+

مثـــال: حول المصطلح التالي إلى مصطلح مؤجل:

(A – B) * [C – N / [K + F * C]]

الجواب: الجواب النهائي هو

A B – C N K F C * + / – *

للتأكد من الجواب يمكن مقارنة فهم هذا المصطلح المؤجل كما تعلمنـــــا مــــع فـــهم المصطلح كامل الأقواس الذي ينتجه المصطلح الأصلي.

مثـــال: حول المصطلح التالي إلى مصطلح مؤجل:

A – B * C + F

الجواب: المصطلح المؤجل هو

A B C * – F +

مثـــال: المصطلح التالي:

(A – B) * [C – K / N + F]

يتحول إلى

A B – C K N / – F + *

الباب الخامس
اللغات

الفصل الأول
مفهوم الكلمات

سنقوم هنا بدراسة ما يعرف باللغات التي لا معنى محدد لها بالمفهوم البشري (Formal Languages) . يمكن تناول هذا الموضوع من وجهة نظر تحديد قواعد اللغة أو وجهة نظر تحديد الآلة المولدة للغة. توجد علاقة بين وجهتي النظر حيث يمكن تحويل الآلة إلى قواعد. لكن، بالعكس يمكن تحويل فقط نوع من أنواع القواعد إلى آلة وذلك بطرق صعبة. نظراً لصعوبة موضوع القواعد ولأنه أقل أهمية في الحياة العملية سنركز على موضوع اللغات من وجهة نظر الآلات. تمثل الآلة هنا مجسم بسيط لحاسب إلكتروني.

قبل الخوض في التفاصيل نعود إلى تعريف اللغة في هذا الباب على أنها مجموعة كلمات قد تتشكل من عدة أحرف. بشكل أدق إذا أردنا تعريف لغة تستخدم حرفين a و b، فإننا نقول أن اللغة هي مجموعة جزئية من مجموعة جميع التراتيب الممكنة للحرفين a و b داخل كلمات غير محدودة الطول. يرمز لمجموعة تراتيب الحرفين a و b في كلمات بالرمز S(a,b). إن S(a,b) تحتوي على كلمات مكونة من حرف واحد مثل a أو b. كما إن S(a,b) تحتوي على كلمات مكونة من حرفين باستخدام a و b. هذه الكلمات هي:

aa , ab , ba , bb

نستخدم في الرياضيات أيضا كلمة لا تتكون من حروف. هذه الكلمة رمزها λ، وهي تعتبر كلمة يمكن تركيبها باستخدام أية مجموعة من الحروف بحيث لا تتكون مـــن أي حرف. أي يمكن القول أن

$$\lambda \in S(a,b)$$

وللدلالة على أن S (a,b) هي مجموعة الكلمات المكونة باستخدام حرفي a و b بغـض النظر عن طول الكلمة نكتب

$$S(a,b) = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots\}$$

لاحظ أننا كتبنا داخل رمز المجموعة الكلمة التي طولها صفر باستخدام a و b (الكلمـة λ) أولاً. ثم كتبنا الكلمات باستخدام a و b المكونة من حرف واحد تليها الكلمـات المكونة من حرفين باستخدام a و b. أخيراً أتت النقاط الثلاث للدلالة على أن هـــذا النمط مستمر دون توقف، أي أن النقاط الثلاث تعبر عن كلمـات محذوفـة وهـي الكلمات المكونة من ثلاثة حروف وأربعة حروف وخمسة حروف وهلم جرا. عـودةً إلى تعريف اللغة، إذا رمزنا للغة تستخدم الحرفين a و b بالرمز L، فإنه يمكن القول أن

$$L \subset S(a,b)$$

اللغات التي نهتم بها عادة تكون لغات غير محدودة، بمعنى أن عدد الكلمـات فيـها لا نهائي. مثلاً، لو فرضنا أن

$$L = \{ab, abab, ababab, \ldots\}$$

في هذه الحالة اللغة هي لغة تكرار المقطع ab عدة مرات أقلها واحد. إن النقاط الثلاث داخل رمز المجموعة أعلاه تدل على حذف الكلمات التي تستمر على نمط أول ثـلاث كلمات. أول ثلاث كلمات كانت المقطع ab مرة واحدة والمقطع ab مكرر مرتـين والمقطع ab مكرر ثلاث مرات.

توصف اللغة عادة بشكل لغوي كما توصف بشكل رياضي. مثلاً، لغة تكرار المقطع ab السابقة يعبر عنها الوصف التالي: هي مجموعة الكلمات المكونة من a و b بحيث

أ- تبدأ بحرف a،

ب- تتسلسل الحروف a و b تباعاً وبالتناوب a تليها b و b تليها a،

ج- عدد حروف a يساوي عدد حروف b.

كمثال آخر لننظر إلى اللغة التالية:

$$L = \{ a , aaa , aaaaa , \ldots\}$$

وصفها اللغوي يمكن أن يكون: هي مجموعة كلمات باستخدام a و b بحيث

أ- تحتوي فقط حروف a،

ب- عدد حروف a فردي.

لاحظ أن كلمة باستخدام لا تعني بالضرورة استخدام الحرفين المشار لهما وإنما تدل على إمكانية استخدام هذين الحرفين لتشكيل الكلمات. أما اللغة التالية:

$$L = \{ \lambda , bb , bbbb , \ldots\}$$

تحتمل الوصف اللغوي التالي: هي مجموعة كلمات باستخدام a و b بحيث

أ- تتكون من حروف b،

ب- عدد حروف b زوجي (أقلها صفر).

لاحظ أن الكلمة الأولى في L وهي λ تنطبق عليها المواصفات المذكورة. الكلمة λ كلمة حيادية يمكن اعتبارها مكونة باستخدام a و b أو باستخدام أية حروف أخرى. كما أن عدد حروف b فيها صفر وهو عدد زوجي لقد وضعنا مصطلح أقلها صفر بين قوسين لأننا عادة نقصد بالحروف عدد من الحروف أقله صفر. لذا، استخدمنا المصطلح للتأكيد ووضعناه داخل قوسين لأننا لن نفعل هذا دائماً. يجدر بالملاحظة أن الوصف اللغوي يجب أن يعكس تركيب اللغة L مئة بالمئة. بمعنى يجب أن ينطبق الوصف اللغوي على كل كلمة من كلمات L و أي كلمة لا ينطبق عليها الوصف

اللغوي للغة يجب أن لا تنتمي إلى L.

سنورد الآن عدة أمثلة على لغات يتم وصفها لغوياً للتمرين على مسألة التحديد الدقيق للغة:

١- L هي لغة تحتوي على كلمات باستخدام a و b بحيث:

أ- بدايتها حروف a ،

ب- نهايتها حرف b.

إذاً، سنحصل على

$$L = \{ b , ab , aab , aaab , \ldots\}$$

لاحظ أن حروف a قد تعني عدم وجود أي حرف a في البداية ونضع حرف b واحد فقط في النهاية فتكون الكلمة b كلمة داخل L.

٢- L هي لغة تحتوي على كلمات باستخدام a و b وc بحيث:

أ- بدايتها حرف a،

ب- وسطها حروف b،

ج- نهايتها حرف b أو حرف c.

في هذه الحالة سنكتب L على صورة اتحاد مجموعتين لمراعاة استخدام حرف b أو حرف c كنهاية للكلمات ، أي

$$L = \{ ab , abb , abbb, \ldots\} \cup \{ ac , abc, abbc , \ldots\}$$

٣- L هي لغة تحتوي على كلمات باستخدام a و b بحيث:

أ- عدد حروف a يساوي عدد حروف b،

ب- كل حرف a يليه حرف b و كل حرف b يليه حرف a.

لاحظ أن كلمة λ تنطبق عليها الشروط، ولذا

$$L = \{ \lambda , ab , ba , abab , baba , \ldots\}$$

الفصل الثاني

دمج الكلمات

توجد عملية مهمة تستخدم عندما نتعامل كلمتين وهي عملية دمـــج الكلمتـــين معاً. مثلاً، إذا أردنا دمج كلمة ab مع ba فإن احتمال دمج الأولى مع الثانية يعطـــي الكلمة abba، أما لو دمجنا بالعكس فإننا سنحصل على baab. طبعاً، كما في اللغـــات العادية ترتيب الحروف داخل الكلمة يعمل على تغيير اللفظ والمعنى. لذا الكلمة الناشئة عن الدمج الأول تختلف عن الكلمة الثانية عن الدمج الثاني. الصفـــة المشـــتركة بـــين الكلمتين هي أن عدد الحروف هو أربعة.

عند دمج حرفين معاً في اللغة العربية نستخدم رمز الشدة للتعبـــير عـــن إدغـــام الحرف الأول مع آخر من نفس نوعه. في الرياضيات أيضاً سنستخدم مبـــدأ مشـــابه. رياضياً، وضع حرفين معاً يعني باعتبارهما مجهولين بينهما عملية حسابية إلى أن نضـــوب الأول في الثاني. إذا كان الحرفان من نفس النوع نستخدم رمز التربيع للدلالـــة علـــى الضرب. لذا، سنعتبر مجازاً أن الكلمة baab هي الكلمة ba^2b. التتابع مهم ونســـتخدم هنا القوة للدلالة على عدد الحروف المتتابعة التي تم دمجها معاً. لذا، يمكن القول أن

$$ba^3\,b^2 = b\,a\,a\,a\;\;b\,b$$

لكن، يجب أن لا نعتبر القوة هنا بمعنى الرمز الرياضي الاعتيادي للأسس وأنها تخضـــع لقوانين الأسس. نحن في موضوع اللغات نستخدم القوة للتعبير عن تكرار حرف عـــدة مرات بشكل متتابع. كما أننا قد نعبر عن تكرار مقطع من الحروف عدة مرات بشكل متتابع. في هذه الحالة نستخدم الأقواس للدلالة على أن المقطع يجب أن يبقى متماســـكاً أثناء عملية التكرار. مثلاً، لدينا المعادلة

$$(a b)^2 = a b a b$$

أي أننا نكرر المقطع ab مرتين عند رفعه للقوة 2 بين قوسين. هذا ليس كما في حالة الأسس مكافئ لرفع a للقوة 2 ثم رفع b للقوة 2. المصطلح الأخير هو

$$a^2b^2 = aabb$$

إذاً، اختلف ترتيب الحروف وبالتالي حصلنا على كلمة جديدة. كما أن وجود القوس مهم للدلالة على المقطع. فلو كتبنا المعادلة دون أقواس لحصلنا على

$$a b^2 = a b b$$

أي إن القوة تتبع دائماً آخر حرف أو آخر قوس في الكلمة. مثلاً، لدينا

$$a (ba)^2 = a b a b a$$

في الرياضيات العادية رفع مجهول للقوة صفر يعطي العنصر الحيادي في عملية الضرب العدد 1. لذا، سنتفق اصطلاحاً على أن رفع حرف أو مقطع للقوة صفر في اللغات يعطي الكلمة الحيادية λ. أي، نقول

$$a^0 = \lambda , \ b^0 = \lambda , (ab)^0 = \lambda$$

كما أننا سنطبق مبدأ جمع القوى في اللغات عند دمج كلمة مع أخرى. مثلاً، عندما ندمج abb مع bab ينتج

$$a b^2 bab = ab^3 ab$$

لاحظنا انه التقت b المربعة (تدل على حرفي b) مع b في الوسط. لذا يكون عدد حروف b في الوسط ثلاثة أو نقول أننا جمعنا قوة b الأولى وهي 2 إلى قوة b التي تلتها وهي 1 لنحصل على القوة 3. هذا التخيل يفيدنا عند التعامل مع λ وحروف أخرى. مثلاً، لو دمجنا λ مع أية كلمة أخرى فإنها تختفي وذلك لأنها تعبر عن الكلمة التي ستندمج معها مرفوعة للقوة صفر. أي حسب قانون جمع القوى سنضيف صفر إلى القوة واحد فتبقى القوة واحد (الكلمة الأصلية). بالرموز، هذا الكلام يكتب كالتالي:

$$a \lambda = a^1 \ a^0 = a^1 = a$$
$$\lambda a b = (ab)^0 \ (ab)^1 = (ab)^1 = ab$$

قد يحدث أحياناً أن ندمج ثلاث كلمات معاً. إذا ما حدث بعد الدمج تتابع لحـــروف متشابهة، فإننا نختصر من خلال جمع القوى. مثلاً، دمج abb مع ba مع aab يؤدي إلى

$$ab^2\ ba\ a^2b = ab^3\ a^3b$$

لو حصل أن λ أتت في وسط الكلمات المندمجة معاً فإنها ستختفي . تفسير ذلـك أن λ تندمج مع الكلمة الأولى فتختفي وتبقى الكلمة الأولى مع الأخيرة. مثلاً، نقول أن

$$b\,a\,a\ \lambda\ a\,b = b\,a^3\,b$$

لو عدنا إلى اللغة التالية:

L = { ab , abab , ababab , …}

فإننا يمكن استخدام رموز مختصرة لوصف هذه اللغة كالتالي:

$$L = \{(ab)^1, (ab)^2, (ab)^3, \ldots\}$$

رياضياً، يتم التعبير عن رفع المقطع ab لقوى متتابعة ابتداءاً مـــن العـــدد 1 بالطريقـــة التالية:

$$L = \{(ab)^n\ :\ n = 1 , 2 , 3 , \ldots\}$$

كثيراً ما يحدث أن تبدأ القوى بالعدد صفر وليس واحد. لو كتبنا

$$V = \{ (ab)^n : n = 0 , 1 , 2 , \ldots\}$$

لقصدنا أن

V = { λ , ab , abab , ababab ,…}

أي أن V هي لغة تشمل على مقاطع ab مكررة والكلمة الحيادية λ. يوجـــــد رمـــز لاختصار عملية رفع مقطع لقوى ابتداءاً من العدد صفر وهو رمز النجمة. أي عندمـــا نكتب

(ab) *

فإننا نقصد المجموعة V، أي مجموعة الكلمات التي يتكرر فيها المقطع ab عـــدداً غـــير محدود من المرات إضافة إلى الكلمة λ. إذا ازلنا الأقواس فإن النجمة تعود كالقوة علـــى حرف أو مقطع. مثلاً،

a* = {λ , a , aa , aaa , …}

$$a^*b = \{b , ab , aab , aaab , \ldots\}$$
$$ba^* = \{b, ba , baa , baaa , \ldots\}$$
$$aa^* = \{ a , aa , aaa , \ldots\}$$
$$a (ab)^* = \{a , aab , aabab , \ldots\}$$

قد يصعب أحياناً كتابة المجموعة التي يرمز إليها المصطلح بصورة يتضح معها نمط الكلمات. مثلاً، المصطلح التالي:

$$a^* b^*$$

يدل على الكلمات المكونة من a و b بحيث تبدأ بحروف a وتنتهي بحروف b. أي لا يمكن اختلاط الحروف معاً والنجمة لحرف a أولاً تعني عدداً غير محدوداً من حروف a (أقلها صفر) أولاً تليها مجموعة من حروف b (أقلها صفر) ثانياً. فبينما تنتمي الكلمة aab إلى المجموعة التي ينتجها المصطلح، لا تنتمي الكلمة aba إلى هذه المجموعة. لو نظرنا إلى المصطلح التالي:

$$a^* a^*$$

لاستطعنا على غرار الشرح السابق وصفه لغوياً بأنه مجموعة الكلمات المكونة من حروف a فقط. أي إن λ تنتمي إلى المجموعة المنتجة من المصطلح لأنها تتشكل بأن نأخذ من النجمة الأولى λ ومن النجمة الثانية λ ومعروف أن

$$\lambda\lambda = a^0a^0 = a^0 = \lambda$$

كما أن أي كلمة تحتوي على حروف a يمكن تشكيلها بعدة طرق. مثلاً، لتشكيل aaa يمكن أن نأخذ من النجمة الأولى a ومن النجمة الثانية aa وبالعكس. أو نأخذ من النجمة الأولى aaa ومن الثانية λ وبالعكس. في النتيجة النهائية نخلص إلى أن

$$a^* a^* = a^*$$

ماذا عن المصطلح التالي باستخدام نجمتين

$$(a^*)^*$$

نبدأ بالنجمة الخارجية (للقوس). النجمة معناها تكرار غير محدود للقوس أي أن المصطلح هو عبارة عن الأجزاء التالية:

λ , (a*) , (a*) (a*) , ...

يمكن إزالة الأقواس لأنها لا تحمي شيئاً من التفكك. أي المصطلح مكون من الأجزاء

λ , a* , a* a* , ...

وحسب ما فهمنا سابقاً هذا السطر يمكن كتابته كالتالي:

λ , a* , a* , ...

وبالتالي فإن هذه الأجزاء المبعثرة يمكن شملها من خلال a مرفوعة لنجمة. أي

$(a^*)^* = a^*$

نلاحظ أن النجمة الداخلية ألغت النجمة الخارجية. لكن، أحياناً تختلف الظروف ويصبح للنجمة الخارجية دور تؤديه. مثلاً، المصطلح التالي:

$(a^* b^*)^*$

مكون من الأجزاء

λ , a* b* , a* b* a*b*, ...

الجزء الثالث يتكلم عن كلمات قد تبدأ بالحرف a أو بالحرف b إذا أخذنا من النجمة الأولى λ . إذا أردنا أن نعرف وسط الكلمات فهو إما حروف a أو حروف b إذا الغينا أحد النجمتين في الوسط. إذا أخذنا النجمتين معاً في الوسط نحصل على حروف b تليها حروف a. نهاية الكلمات ممكن أن تكون حروف b إذا لم نلغي النجمة الأخيرة. أما إذا اخترنا λ بدل النجمة الأخيرة (لحرف b) فإننا ننهي الكلمة بحروف a. في الواقع للوصول إلى جواب شاف يمكن أن نكتفي بدراسة الكلمات المكونة من ثلاثة أو أربعة حروف باستخدام a و b فقط. إذا كتبنا جميع الكلمات ذات ثلاثة حروف نحصل على الكلمات التالية المرتبة قاموسياً:

aaa , aab , aba , abb ,
baa , bab , bba , bbb

يمكن بسهولة رؤية أن الكلمة الأولى تأتي من الوضع التالي:

$a^3 \lambda\lambda\lambda = aaa$

هذا الوضع يسمح به الجزء الثالث حيث نأخذ من النجمة الأولى ثلاثة حروف a ومن الباقي كلمة λ. إذاً، الكلمة الأولى مشمولة ضمن الجزء الثالث. كما يمكن تفسير شمول هذا الجزء لبقية الكلمات كالتالي:

$a^2 b\lambda\lambda$, $aba\lambda$, $ab^2\ \lambda\lambda$,
$\lambda\ ba^2\lambda$, $\lambda\ bab$, $\lambda\lambda b^2a$, $\lambda\lambda b^3$

أما الكلمات ذات أربعة حروف فهي:

aaaa , aaab , aaba , aabb,
abaa , abab , abba , abbb,
baaa , baab , baba , babb,
bbaa , bbab , bbba , bbbb

يمكن باستخدام المنطق السابق تفسير أن الجزء الثالث يشمل هذه الكلمات جميعاً. مثلاً، الكلمة abab تأتي من اختيار حرف واحد من كل نجمة. أما البقية فتأتي باستخدام λ والحصول على أكثر من حرف من أحد النجوم. ملخص الكلام أن الجزء الثالث يشمل جميع الكلمات المشكلة من ثلاثة أو أربعة حروف باستخدام a و b. يمكن تعليل أن الجزء الثاني سيشمل جميع الكلمات ذات الحرف أو حرفين باستخدام a و b. الجزء الرابع أي

a* b* a* b* a*b*

سيشمل جميع الكلمات المستخدمة لخمس أو ستة حروف a أو b. لو استمر هذا الموال إلى ما لا نهاية وأتينا على دراسة جميع الأجزاء، لوجدنا أن مجموع هذه الأجزاء معاً سيشمل جميع الكلمات المكونة من حرفي a و b دون تقييد. طبعاً قد يحصل تداخل بين الأجزاء، ولكن في المحصلة النهائية يمكن القول أن

$(a^*b^*)^* = S(a,b)$

يمكن استخدام التعليل السابق لتفسير أن:

$(a^*b^*\ a^*)^* = S(a,b)$
$(a^*\ b^*\ a^*\ b^*)^* = S(a,b)$

لو أمعنا النظر في المصطلح التالي:

$(b^*a)^* = \lambda , b^* a , b^* ab^*a , \ldots$

لأمكننا القول بأنها كلمات تستخدم a و b لتكوينها بحيث:

أ- تنتهي بحرف a أو تكون λ.

لفهم ذلك بشكل أعمق دعنا ندرس الكلمات التي تنتهي بحرف a وتحتوي على 4 حروف على الأكثر:

a , aa , ba , aaa , aba, baa ,
bba , aaaa , aaba , abaa ,
abba , baaa , baba ,
bbaa , bbba

يمكن تفسير الحصول على كل كلمة منها باستخدام المصطلح السابق كالتالي:

$\lambda a , \lambda a\lambda a , ba , \lambda a \lambda a\lambda a ,$
$\lambda a\, ba , ba\, \lambda a, b^2a ,$
$\lambda a \lambda a \lambda a \lambda a , \lambda a \lambda a\, ba ,$
$\lambda a\, ba\, \lambda a , \lambda ab^2a , ba\lambda a\lambda a ,$
$baba , b^2a\, \lambda a , b^3a$

على هذا الغرار يمكن إثبات انتماء أي كلمة تنتهي بحرف a لها أكثر من أربعة حروف إلى المجموعة التي ينتجها المصطلح. كما أن الكلمات التي تنتهي بالحرف b لا يمكن أن تنتمي إلى هذه المجموعة لأن المصطلح يحتوي على تكرار مقطع نهايته a. يوجد مصطلح آخر يعبر عن الكلمات التي تنتهي بالحرف a دون λ. هاك المصطلح

$(a^*b^*)^*a$

نحن نعرف أن القوس هو شامل لجميع الكلمات المحتوية على a و b. عندما نضع حرف a في نهاية المصطلح نعرف أن النهاية حرف a بينما البداية غير مقيدة.

كل مصطلح يستخدم رمز النجمة يمكن وصفه لغوياً بشكل دقيق. للتأكد يمكن

محاولة كتابة أكبر عدد مناسب من الكلمات التي ينتجها المصطلح ومقارنتها مع الوصف اللغوي، كما يجب النظر إلى كلمات أخرى بنفس العدد من الحروف والتأكد من أن المصطلح عاجز عن توليدها. لكن، لا شك أن الخبرة تساعد في هذه العملية. للتمرين سنورد بعض الأمثلة:

١- المصطلح $a^* b$

هو كلمات تستخدم a و b بحيث:

أ- بدايتها حروف a،

ب- نهايتها حرف b.

٢- المصطلح $(ab^* ab^*)^* a$

هو كلمات تستخدم a و b بحيث

أ- تبدأ وتنتهي بحرف a،

ب- عدد حروف a فيها فردي.

لإيضاح ذلك نقول أن النجمة الخارجية ستعمل على تكرار القوس مما يجلب معه حرفين a في كل مرة. وبالتالي عدد حروف a في بداية الكلمة زوجي وحرف a يأتي في النهاية ليجعل عدد حروف a الإجمالي فردي. حروف b داخل القوس عددها غير محدود وهي تعمل على فصل حرفي a عن بعضهما البعض إذا شئنا، كما أن حروف b في نهاية القوس ستفصل عند الرغبة حرف a من آخر تكرار عن حرف a في نهاية الكلمة. إن أول تكرار للقوس سيحضر حرف a في البداية ليصبح بداية الكلمة وفي حال لم نكرر القوس البتة فإنه لدينا حرف a في النهاية والبداية لأنه وحيد. سننتج الآن بعض الكلمات لتوضيح مطابقتها للوصف اللغوي:

$\lambda\ a = a$

$a\ \lambda\ a\ \lambda\ a = a^3$

$ab^2\ ab^3\ a = abbabbba$

$a\ \lambda\ a\ b\ a\ \lambda\ a\ \lambda\ a = aabaaa$

$a\,\lambda\,a\,\lambda\,a\,\lambda\,a\,b\,a = aaaaba$

٣- المصطلح $b^*(ab^*ab^*)^*ab^*$

هو مجموعة كلمات تستخدم a و b بحيث يكون عدد حروف a فردي. هذا المثال هو شبيه لسابقه مع الفرق إضافة حروف b في البداية والنهاية. بالتالي يسقط التقييد حول بداية ونهاية الكلمات وتبقى الصفة الثانية فقط (الصفة ب).

٤- المصطلح $a(a^*b^*)^*a$

هو مجموعة كلمات تستخدم a و b بحيث تبدأ وتنتهي بحرف a.

٥- المصطلح ab^*db^*a

هو المصطلح الذي يبدأ وينتهي بحرف a بحيث يأتي في الوسط مجموعة حروف b يليها حرف d ثم مجموعة أخرى من حروف b. يجدر بالإشارة هنا إلى أن مجموعتي حروف b مستقلتان، أي المصطلح يضم الكلمات التالية:

$abda\ ,\ adbba\ ,\ ab^2db^3a$

الفصل الثالث
المصطلحات النظامية

لقد سبق وتعرفنا على اللغة التالية:

$$L = \{ab, abb, abbb, \ldots\} \cup \{ ac, abc, abbc, \ldots\}$$

ورأينا في الفصل السابق كيف أن المصطلحات باستخدام رمز النجمة تولد مجموعة من الكلمات أو لغة. لو فكرنا هل بمقدورنا التعبير عن اللغة أعلاه من خلال مصطلح مناسب أم لا؟ الجواب نعم، إذا ما استخدمنا عملية جديدة على الكلمات. العملية الجديدة ستراعي عملية اتحاد المجموعتين المكونتين للغة L. المصطلحات التي تستخدم هذه العملية الجديدة إضافة إلى عملية النجمة تدعى مصطلحات نظامية. أي إن اللغة أعلاه يمكن التعبير عنها من خلال مصطلح نظامي. للأسف ليس كل لغة قابلة للإنتاج من خلال مصطلح نظامي. لذا، تدعى اللغات التي يعبر عنها مصطلح نظامي اللغات النظامية، وهي الأهم في التطبيقات. نعود إلى العملية الجديدة سالفة الذكر. هذه عملية تعرفنا عليها في باب المنطق وهي عملية أو. سنستخدم عملية أو هنا مع الكلمات للدلالة على إمكانية اختيار كلمة من بين عدة كلمات. مثلاً، المصطلح التالي:

$$a\,b \vee a\,c$$

يدل على كلمتين وهما a b و ac ، أي

$$a\,b \vee ac = \{ ab , ac\}$$

كذلك لدينا العلاقة

$$a\,(b\vee c) = \{ ab , ac\}$$

نكون هنا قد وضعنا a في بداية الكلمة وسمحت لنا عملية أو باختيار نهاية الكنمة إمـــا b أو c. إذاً، لدينا العلاقة

$$a (b\vee c) = ab \vee ac$$

لو نظرنا إلى المصطلح النظامي التالي:

$$a^* (b \vee c)$$

لكان وصفه اللغوي على أنه يمثل مجموعة كلمات تستخدم a و b و c بحيث :

أ- بداية الكلمات حروف a،

ب- نهاية الكلمات إما b أو c.

عودة إلى اللغة في بداية الفصل. يقوم المصطلح النظامي التالي بالتعبير عن اللغة L:

$$a\, b^* (b \vee c)$$

أي أن عملية $\vee$ هي مرادف لعملية الاتحاد بين المجموعات. لذلك

$$a^* \vee b^* = \{ \lambda , a , aa , \ldots\} \cup \{ \lambda , b , bb , \ldots\} = \{\lambda , a , b , aa , bb, \ldots\}$$

كوصف لغوي نقول بأنها كلمات تستخدم a و b بحيث الكلمـــــة مكونـــة كاملـة باستخدام حرف a أو مكونة كاملة باستخدام حرف b.

سنتناول الآن مصطلحاً أكبر من السابق بالرغم من أنه يحتوي على نجمة واحـــدة بدل نجمتين. هذا المصطلح هو

$$(a \vee b)^*$$

كما نعلم النجمة تعني تكرار القوس ابتداءاً من قوس قوسين وهلم جرا إضافـــة إلى λ. لو أخذنا قوس واحد لحصلنا على المصطلح

$$a \vee b$$

الذي يدلنا على وجود كلمتين محتملتين وهما إما a أو b. وبالتالي المصطلــــح الــذي ندرسه يشمل λ و a و b. لو أخذنا قوسين لنتج معنا الوضع التالي:

$$(a \vee b)\ (a \vee b)$$

تتركب الكلمة الآن من حرفين بحيث يأتي الحرف الأول من القوس الأول والحرف الثاني من القوس الثاني. كلا القوسين بإمكانه إعطاء حرف a أو حرف b. بما أن عملية الاختيار من القوس الأول مستقلة عن عملية الاختيار من القوس الثاني، تكون لدينا أربعة احتمالات لتشكيل الكلمة من الوضع السابق وهي:

aa , ab , ba , bb

إنها جميع الكلمات الممكنة باستخدام a و b المحتوية على حرفين. لو أخذنا الآن ثلاثة أقواس من المصطلح المذكور

$$(a \vee b)\ (a \vee b)\ (a \vee b)$$

لأمكننا تعليل إنتاج جميع الكلمات باستخدام a و b المحتوية على ثلاثة حروف كما شرحنا للتو. هذه العملية مستمرة إلى ما لا نهاية، أي يمكن إثبات شمول المصطلح لكلمة ما باستخدام a و b تتكون من عدد محدود من الحروف عن طريق أخذ نفس عدد الحروف من الأقواس ثم اختيار الأحرف داخل الكلمة بالترتيب من الأقواس بنفس الترتيب الوارد في الكلمة. نستنتج مما سبق أن

$$(a \vee b)^* = S(a, b)$$

ولذا، يمكن القول أن

$$a^* \vee b^* \subset (a \vee b)^*$$

أي النجمة مع القوس أكبر من نجمتين منفصلتين.

كنا قد ذكرنا سابقاً أن

$$(a^* b^*)^* = S(a,b)$$

ولذا نستنتج أن

$$(a^* b^*)^* = (a \vee b)^*$$

هذا يشير إلى أن هنالك مصطلحات مختلفة في المظهر لكن متطابقة في المضمون. يمكننا أيضاً إثبات أن

$$(a^* \vee b^*)^* = (a \vee b)^*$$

وذلك بأن نثبت أن الطرف الأيسر هو جميع الكلمات المكونة من حرفي a و b. لفعل ذلك نكتب كما سبق الطرف الأيسر في إحدى صوره العديدة المحتملة وهي

$$(a^* \vee b^*)\,(a^* \vee b^*)$$

يمكننا تكوين λ من كلا القوسين. إذا أردنا الحصول على a أو b نختار المطلوب من القوس الأول و λ من القوس الثاني. إذا أردنا الحصول على الكلمات الأربع:

aa , ab , ba , bb

فإنه يمكن ذلك باختيار حرف مناسب من كل قوس كما سبق. لكن، توجد هنا إمكانيات أخرى كاختيار حرفي a من القوس الأول و λ من القوس الثاني لتشكيل الكلمة الأولى. للحصول على كلمات ذات ثلاثة حروف نستخدم ثلاثة أقواس كما سبق. إذاً، النجمتان الداخليتان لا تؤثران كثيراً وإنما تعملان على زيادة عدد الطرق الممكنة لتشكيل كلمة ما باستخدام a و b. بهذا الشرح نصل إلى أن

$$(a^* \vee b^*)^* = S\,(a\,,b)$$

ختاماً لهذا الفصل سنورد بعض الأمثلة على مصطلحات نظامية سنحتاجها لاحقاً:

١- $(a \vee b)^*\,a$

المصطلح يرمز إلى المجموعة التي تحوي جميع الكلمات باستخدام a و b بحيث تنتهي بحرف a. هذا جلياً من خلال معرفة أن a تأتي في النهاية ويسبقها أية تشكيلة من الحروف. لقد سبق ورأينا أن

$$(a^*\,b^*)^*\,a$$

يرمز إلى نفس المجموعة.

٢- $(a \vee b)^*\,(aa)^*$

القوس في البداية يدل على أن البداية غير مقيدة بأي شروط. ما يلي القوس يعبر عن ان عدد حروف a زوجي لأن حروف a تأتي أزواجاً في النهاية (شامل لصفر من

حروف a). إذاً، المصطلح يرمز إلى الكلمات التي لها خاصية الانتهاء بعدد زوجي من حروف a.

٣- $(a \vee b)^* \ (aa)^* \ aa$

كما ورد في المثال السابق هي كلمات بدايتها مفتوحة ونهايتها مقيدة بعدد زوجي من حروف a أقلها حرفين. هذان الحرفان هما الحرفان المثبتان في آخر المصطلح وإذا أتت أزواج جديدة فإن العدد الإجمالي يبقى زوجي.

٤- $(a \vee b)^* \ (aa)^* \ a$

مما سبق يمكن القول أن المصطلح يساوي مجموعة الكلمات التي تنتهي بعدد فردي من حروف a. كأمثلة على الكلمات التي يشملها هذا المصطلح:

aba , babaaa , abababa , baaaaaba

وكأمثلة على كلمات لا تندرج ضمن مجموعة المصطلح:

abaa , bab, aababaa , bbaaabb

٥- $(b^* \ ab^* \ ab^* a)^* \ b^*$

نلاحظ أن كل قوس سيعطي ثلاثة حروف a قد يتخللها حروف b. فلو استخدمنا القوس مرتين لحصلنا على ستة حروف a دون تقييد على عدد حروف b. إن حروف b تأتي في البداية من خلال نجمة حرف b في بداية القوس والتي تعمل أيضاً على فصل حرف a في آخر القوس عن حرف a القادم من القوس الثاني بعدة حروف b. كما إن نجمة حرف b في آخر المصطلح تعمل على تزويد الكلمة بحروف b في النهاية. مما أوردنا نستنتج أن حروف b تأتي في البداية والنهاية والوسط كيفما شئنا. أما حروف a فإنها تأتي من مضاعفات العدد 3. أي يمكن أن لا تحتوي الكلمة على أي حرف a أو يمكن أن تحتوي على ثلاثة، ستة، تسعة حروف a وهلم جرا.

٦- $(a \vee b)^* \ aa$

يرمز هذا المصطلح إلى مجموعة الكلمات التي تنتهي بالمقطع aa وكأمثلة على ذلك:

aa , abaa , aaa , bbaa , baaaa

٧- $(a \vee b)^* a (a \vee b)^*$

وجود حرف a خالي من النجوم يعني وجوب وجوده داخل كل كلمات المصطلح. نرى أن البداية والنهاية غير مقيدة لا من ناحية عدد الحروف أو نوعيتها. لذا، المصطلح هو مجموعة الكلمات التي تستخدم a و b في تكوينها بحيث تحتوي على حرف a واحد على الأقل. كأمثلة على كلمات مشمولة:

a , ab , ba , aa , bba , aba

٨- $a^* (a^*ba^*a)^* ba^*$

الكلمات يجب أن تحتوي على الأقل على حرف b واحد. نلاحظ أن بداية الكلمة ونهايتها يمكن أن تكون عدة حروف a. لكن قد تأتي أكثر من b في الوسط وذلك إذا ما استخدمنا القوس. إن استخدام القوس مرة واحدة يعطي كلمات على الشكل التالي:

$a^* a^* ba^* aba^*$

نرى أن حروف a قد تتوسط بين حرف b الأول وحرف b الثاني من خلال نجمة حرف a بعد حرف b الأول. لكن نرى أيضاً أن هنالك حرف a واحد ثابت قبل الوصول إلى حرف b الثاني. أي إن حروف a المتوسطة بين حرفي b يجب أن يكون عددها على الأقل واحد. قد يفكر المرء في ماهية الوضع عند أخذ قوسين. في هذه الحالة يصبح شكل الكلمات:

$a^* a^* ba^*a a^*ba^*a ba^*$

يوجد الآن لدينا ثلاثة حروف b بحيث تفصل بين حرفي b الأول والثاني مجموعة لا تقل عن واحد من حروف a. كذلك تفصل بين حرفي b الثاني والثالث مجموعة لا تقل عن واحد من حروف a. إذاً، الأقواس تؤدي إلى إعطاء عدد من حروف b غير

محدود بحيث تفصل بين كل حرفي b متتابعين بمجموعة من حروف a لا تقل عن واحد.

كرديف للوصف السابق نقول أن الكلمات تستخدم حرفي a و b بحيث

أ- تحتوي على حرف b،

ب- لا تحتوي على المقطع bb.

كأمثلة على كلمات ينتجها المصطلح:

b , ba , aba , bab,
babab , aabaabab

وكأمثلة على كلمات لا يمكن اشتقاقها بواسطة العمليات داخل المصطلح:

bba, bb , ababb , bbb

٩- $a^* (a^*ba^*a)^* ba^* \vee a^*$

هذا المصطلح أكبر من السابق (مثال ثمانية) وأوسع، إذ أنه قد تكون الكلمة المنتجة مكونة فقط من حروف a باستخدام أو. بذلك يسقط الشرط أ على الكلمات ويصبح وصفها كالتالي: كلمات تستخدم حرفي a و b بحيث لا تحتوي على المقطع bb.

١٠- $(aa \vee ab \vee ba \vee bb)^*$

كلمات تستخدم a و b بحيث يكون طولها زوجي، لأن: λ مشمولة من قبل النجمة. الآن أية كلمة ذات حرفين يمكن إنتاجها باستخدام قوس واحد، لأن القوس يحتويهم جميعاً. أية كلمة ذات أربعة حروف يمكن توليدها من خلال كتابة قوسين ثم اختيار المقطع الأول من القوس الأول والمقطع الثاني من القوس الثاني كما وردا في الكلمة.

١١- $(aa \vee ab \vee ba \vee bb)^* (a \vee b)$

كلمات تستخدم a و b بحيث يكون طولها فردي.

١٢- b^*ab^*

كلمات تحتوي بالضبط على حرف a واحد.

١٣- $a (a \vee b)^* \vee (a \vee b)^* bb$

كلمات تبدأ بالحرف a أو تنتهي بالمقطع bb.

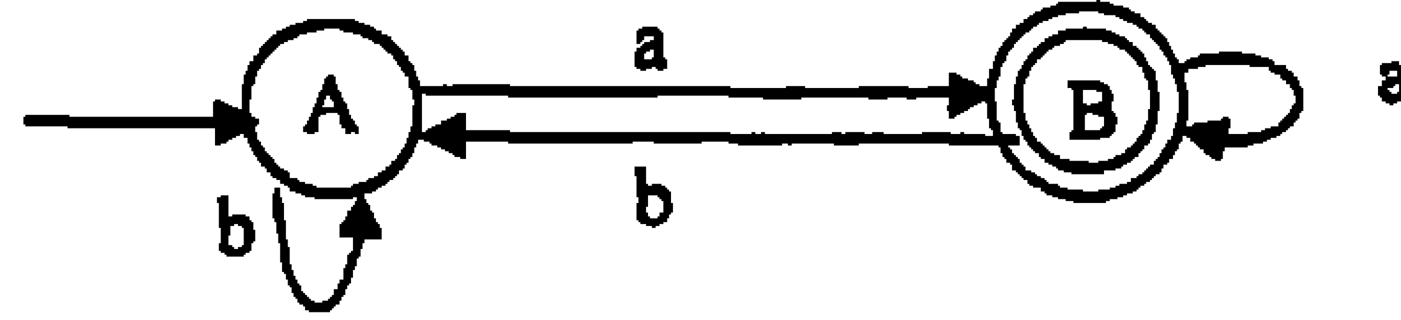
١٤- $(a \vee b)^* aaa (a \vee b)^*$

كلمات تحتوي على ثلاثة حروف a متعاقبة (على الأقل).

الفصل الرابع

الآلات ذات الحالات المحدودة

الآلة ذات الحالات المحدودة هي تجسيم بسيط لحاسب من ناحية نظرية . أي أنه يمكن تصميم هذه الآلات بطريقة هندسية بحيث تقوم بأعمال تشبه أعمال الحاسب الحالي. الآلات التي سندرسها ستكون نماذج نظرية مرسومة على الورق يمكن لاحقاً تحويلها إلى دارات كهربائية. ما يهمنا هو دراسة الآلة نظرياً والتعرف على العمل الذي تؤديه. مثلاً، الشكل التالي يمثل آلة ذات حالات محدودة:



الشكل يشبه الشبكة الموجهة مع بعض الاختلافات. نلاحظ هنا أن هنالك دائرة الحرف B داخل دائرة أكبر. في هذه الحالة تسمى دائرة الحرف B بحالة قبول. بينما تسمى دائرة الحرف a بحالة رفض. أي الحالات كناية عن الدوائر وبما أن عدد الدوائر محدود تسمى الآلة بآلة ذات حالات محدودة. نلاحظ أن الأسهم بين الدوائر مكتوب عليها أحرف. هذه الأحرف ستلعب دوراً في تحديد نوع من الكلمات سيدعى الكلمات المقبولة. يوجد سهم عارٍ من الحروف وهو قادم من الفراغ إلى دائرة A . هذا السهم يرسم مرة واحدة فقط ويكون قادماً إلى دائرة البداية (التشغيل). أما الأسهم التي تحمل حروفاً فإن عددها يكون مساوياً لعدد الحالات مضروب في عدد الأحرف الصغيرة المستخدمة. كما يجب مراعاة أنه في الآلة يصدر من كل دائرة سهم واحد يحمل حرفاً من مجموعة الحروف الصغيرة. فالدائرة A يصدر منها سهماً يحمل

الحرف a ذاهباً إلى الدائرة B وسهماً يحمل الحرف b ينعكس عليها. أمـــا الدائـــرة b فيصدر منها سهم حرف a الانعكاسي وسهم حرف b الذاهب إلى الدائــــرة A. أي كل دائرة يصدر منها سهمان: واحد يحمل حرف a والآخر يحمل حرف b.

ذكرنا سابقاً أنه في الآلة السابقة تكون دائرة (حالـــة) A هـــي دائـــرة البدايـــة (الانطلاق). تتم داخل الآلة حركات تتماشى مع المعطيات الخارجيـــة الـــتي تكـــون كلمات مكونة من أحرف الآلة الصغيرة. فلو أخذنا كلمة ab ورغبنا في معرفة ما هـــي طبيعة الحركة الناجمة عن إدخال هذه الكلمة إلى الآلة، لتسلسلنا كالتالي: الحرف الأول في الكلمة هو a ونبدأ من الحالة A. كما يوضح السهم الصادر من A ويحمل حرف a فإن الحركة تكون إلى الحالة B. إذاً، حرف a يحركنا إلى حالة جديدة وهي B حيـــث سنكمل الحركة من هنالك. الحرف الثاني b والسهم الصادر من الحالـــة B ويحمـــل الحرف b يذهب إلى الحالة A. أي ينتهي بنا المطاف في الحالة A. يمكن التعبير رمزيـــاً عن الحركة السابقة كالتالي:

$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} A$$

لو أردنا معرفة ما هي الحركة التي تسببها الكلمة ba لحسبنا كالتالي:

$$A \xrightarrow{b} A \xrightarrow{a} B$$

لاحظ أن الحركة انتهت هنا في الحالة B بعكس الكلمة ab التي أوقفت الحركة عنـــد دخولها على الآلة في الحالة A. أية كلمة تؤدي إلى وقوف الآلة بعد التفاعل معـــها في الحالة B (حالة القبول) تسمى كلمة مقبولة وأية كلمة تؤدي إلى وقوف الآلة بعـــد التفاعل معها في الحالة A (حالة رفض) تسمى كلمة مرفوضة. وبالتالي كلمة ba هـــي كلمة مقبولة بينما الكلمة ab كلمة مرفوضة. ماذا عن الكلمة aa؟ الجـــواب يكـــون معروفاً بعد النظر إلى رسم الحركة

$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{a} B$$

إذاً، كلمة aa هي كلمة مقبولة. ويمكن بسهولة التأكد من أن bb كلمة مرفوضة.

ما يهمنا عادةً عند دراسة الآلة هو معرفة طبيعة والخصائص المميزة للكلمات المقبولة. في الآلة السابقة نظرنا إلى الكلمات ذات حرفين أي

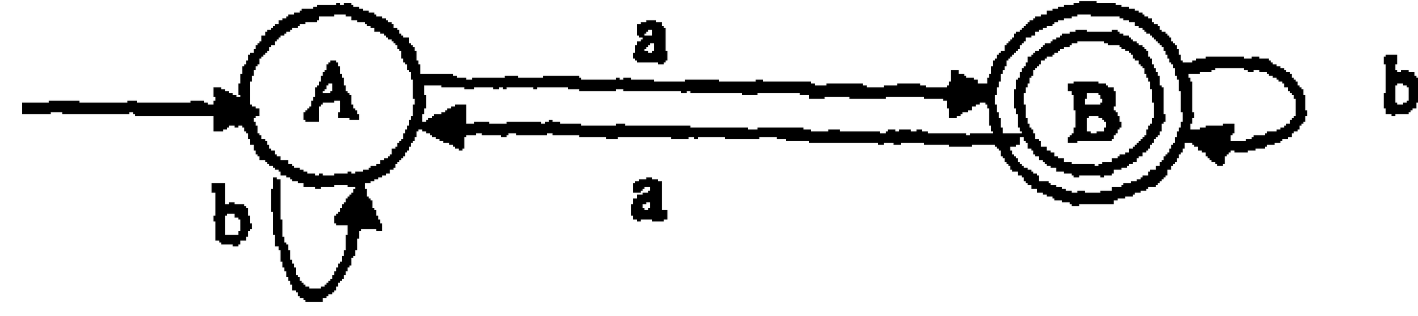
aa , ab , ba , bb

واكتشفنا أن الأولى والثالثة مقبولتان. لو أخذنا الكلمات ذات ثلاثة حروف لوجدنا أن الكلمات المقبولة من بينها هي:

aaa , aba , baa , bba

كما أنه يمكن القول أن الكلمة المقبولة المكونة من حرف واحد هي كلمة a. ما هو الشيء المشترك بين هذه الكلمات جميعاً؟ بعد التدقيق والتمحيص يمكن الجزم بأن الصفة المشتركة هي الانتهاء بحرف a. لكن، هل هذه الصفة مميزة للكلمات المقبولة عن غيرها من الكلمات؟ بمعنى هل أية كلمة لا تملك هذه الصفة يجب أن تكون مرفوضة؟ لو تمعنا قليلاً لوجدنا أن الكلمات المرفوضة فعلاً لا تنتهي بالحرف a بل بالحرف b، أي فعلاً هذه صفة مميزة. قد يحتاج المرء أحياناً إلى تفسير أوضح وأقوى من مجرد فحص الكلمات ذات عدد ما من الحروف لإثبات صحة الإدعاء حول ما يميز الكلمات المقبولة عن غيرها. في مثال الآلة السابقة يمكن القول أن حرف a يؤدي إلى حركة الآلة نحو القبول (الحالة B). فلو كنا في حالة A أو حالة B فسهم الحرف a يذهب بنا إلى الحالة B. أما سهم الحرف b فيأتي بنا من كل حدب وصوب نحو حالة A (حالة الرفض). إذاً، وقوفنا مرهون بآخر حرف. إذا كان الحرف الأخير a نقف في حالة القبول B وإذا كان الحرف الأخير b سنقف في حالة الرفض A.

الوضع سيتغير في حال غيرنا ترتيب الحروف. فلو جعلنا أسهم الحرف b هي الأسهم الانعكاسية لحصلنا على آلة جديدة كالتالي:



توجد كلمة واحدة ذات حرف واحد مقبولة وهي a. أما من بين الكلمات ذات الحرفين فتوجد الكلمتان التاليتان المقبولتان:

ab , ba

ولو نظرنا إلى الكلمات ذات ثلاثة حروف لعثرنا خلالها على أربع كلمات مقبولة وهي

aaa , abb , bab , bba

الصفة المشتركة على الأرجح هي كون عدد حروف a داخل الكلمة عدداً فردياً. هذه فعلاً الصفة المميزة للكلمات المقبولة من قبل هذه الآلة. كتفسير رياضي يمكن القول أنه بما أن أسهم الحرف b انعكاسية فإنها لا تؤدي إلى أية حركة فعلة داخل الآلة. أي من ناحية عملية لا يؤثر حرف b على طبيعة الكلمات المقبولة بتاتاً. يبقى علينا دراسة دور الحرف a في تحديد قبول الكلمة من رفضها. إن دخول حرف a واحد إلى الآلة يعمل على تحريكها من حالة إلى أخرى. بمعنى إن حرف a له تأثير النقل من الرفض إلى القبول وبالعكس بحيث تكون الحركة الأولى من الرفض إلى القبول. لذا، لو كان لدينا حرف a واحد لكانت الكلمة مقبولة. ولو جاء بعده a ثاني لعدنا إلى الرفض وهكذا دواليك. إذاً، يقوم حرفان من a بعمل دورة داخل الآلة. فلمعرفة طبيعة الكلمة مقبولة أم مرفوضة يجب تعداد حروف a داخل الكلمة. ثم نبدأ بإزالة زوجين زوجين من حروف a. إذا كان العدد المتبقي واحد فنحن كنا في حالة القبول والأزواج المزالة لا تغير شيئاً. أما إذا لم يتبقى حروف a فهذا معناه أننا قمنا بعمل دورات من البداية وإليها دون أن نغادر حالة الرفض من ناحية عملية.

نلاحظ أن الوصف اللغوي للكلمات المقبولة من الآلة السابقة كانت سابقاً وصفاً لمصطلح نظامي. هذا المصطلح هو (انظر المثال 3 في الفصل الثاني)

$$b^* (ab^* ab^*)^* ab^*$$

وكان الوصف اللغوي للكلمات المقبولة من قبل الآلة التي سبقتها هو كلمات تنتهي بحرف a. هذا الوصف يمكن أيضاً أن يعبر عنه من خلال مصطلح نظامي. هذا المصطلح هو

$$(a \vee b)^* a$$

هذه الملاحظات ليست مصادفة إذ توجد نظرية عميقة في علم الآلات تنص على أن الكلمات المقبولة من قبل آلة ذات حالات محدودة هي عبارة عن المجموعة المنتجة من قبل مصطلح نظامي وبالعكس.

سنعيد الآن ترتيب الأفكار. في بداية الباب عرفنا اللغة على أنها مجموعة كلمات. ورأينا أن بعض مجموعات الكلمات يرمز إليها من خلال مصطلحات نظامية. ثم أوردنا نظرية تؤكد التوقع بأن الكلمات المقبولة من قبل آلة ما هي في الواقع مجموعة ناتجة من مصطلح نظامي مناسب. لذا، يسمى هذا المصطلح بلغة الآلة. مثلاً، يقال أن لغة الآلة السابقة هي

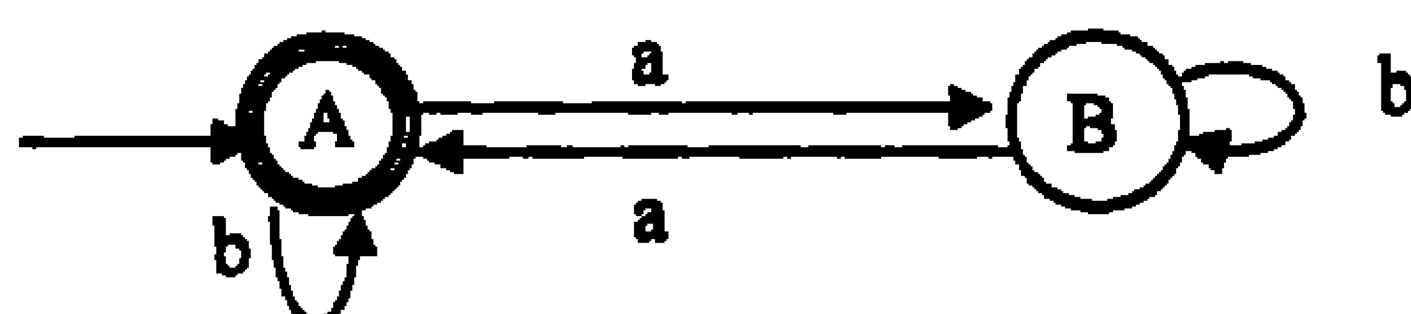
$$b^* (ab^* ab^*)^* ab^*$$

وبالرموز يكتب

$$L(M) = b^* (ab^* ab^*)^* ab^*$$

حيث ترمز L إلى كلمة لغة بالإنجليزية و M إلى كلمة آلة بالإنجليزية.

مثال: أوجد $L(M)$ للآلة التالية:



الحل: هذه الآلة هي نفس الآلة السابقة مع الفرق أن حالة القبول الآن A وليس B. بناءا على ما شرحناه يمكن القول أن كل حرفين a يقومان بعمل دورة، ولذلك إذا كان عدد حروف a زوجي فإن الكلمة تكون مقبولة. طبعا، لا بد من ملاحظة أن الصفر عدد زوجي وأن عدد حروف a زوجي قد يعني عدم وجودها بتاتا. هذا فعلا ما يحدث ولنبدأ بذكر أمثلة. الكلمة λ خالية من حروف a (وكذلك حروف b) فهي تحقق الشرط. لكن، هل λ كلمة مقبولة؟ نعم، لأن λ ترمز إلى تشغيل الآلة. بمجرد تشغيل الآلة نصبح في الحالة A حالة القبول ولذلك λ كلمة مقبولة. الكلمة b تخلو من حروف a وهي كذلك مقبولة. السبب أن كلمة b تفعل الحركة التالية داخل الآلة:

$$A \xrightarrow{b} A$$

أي الوقوف يكون في حالة القبول.

بعد أن تعرفنا على الوصف اللغوي للكلمات المقبولة بأنها تحتوي على عدد زوجي من حروف a ابتداءا من الصفر، يجب كتابتها على صورة مصطلح نظامي. العدد الزوجي ينشأ عندما نحذف من العدد الفردي واحد. ولذلك، لو حذفنا حرف a الثابت في المصطلح النظامي للآلة السابقة لحصلنا على الجواب المطلوب. أي المصطلح هو

$$b^* \ (a\, b^*\, ab^*)^*\, b^*$$

يمكن التحقق من أن نجمة b في الأخير زائدة الآن عن الحاجة ويمكن حذفها لنحصل على

$$L(M) = b^* \,(ab^*\, ab^*)^*$$

طبعا، يمكن التأكد أن λ و b وغيرها من الكلمات المحتوية على عدد زوجي من حروف a قابلة للإنتاج من هذا المصطلح.

الخبير في الرياضيات يتوقع أن صفة كون عدد الحروف عدداً زوجياً هي صفة متممة لكون عدد الحروف عدداً فردياً. هذا فعلاً منطبق في حالة الآلة التي درسناها والتي سبقتها. أي الآلتان تعتبر إحداهما متممة للأخرى. بلغة المجموعات نقول

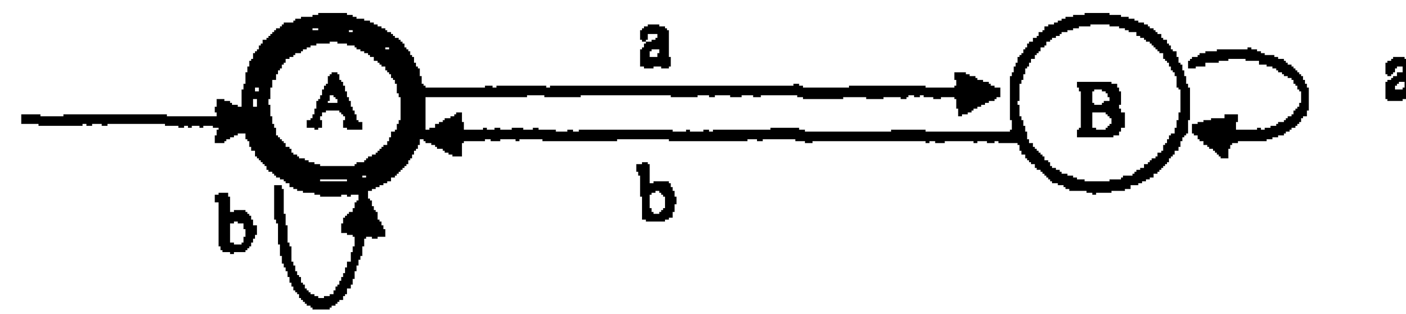
$$L(M_2) = S(a,b) - L(M_1)$$

حيث M_1 و M_2 ترمزان إلى الآلتان. أو نقول أن المجموعتان

$$L(M_1) \ ، \ L(M_2)$$

تعتبران تقسيماً للمجموعة $S(a,b)$.

<u>مثال</u>: أوجد $L(M)$ للآلة التالية:



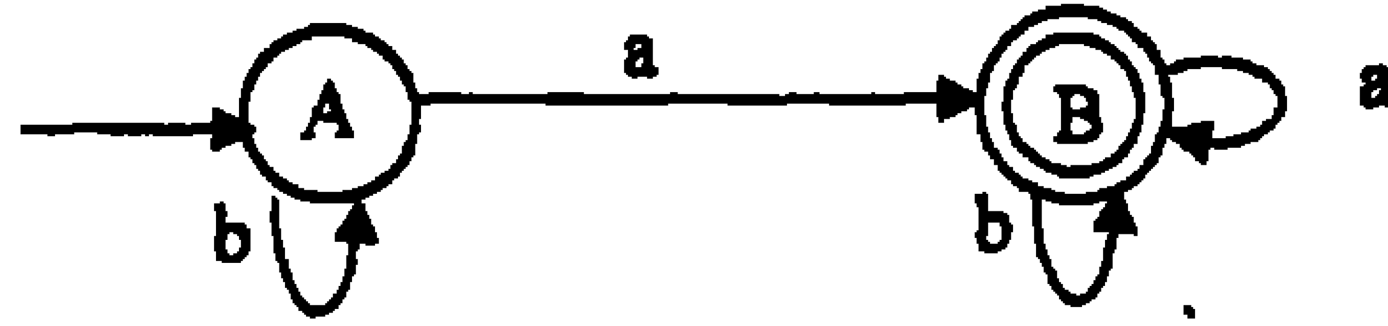
<u>الحل</u>: كما في المثال السابق هذه الآلة هي متممة الآلة التي درسناها في بداية الفصل. الكلمات المقبولة لتلك الآلة كانت الكلمات التي تنتهي بحرف a. لذا، يمكن القول أن الآلة الجديدة ستقبل الكلمات التي لا تنتهي بالحرف a. رياضياً، يمكن الكتابة

$$L(M) = S(a,b) - (a \vee b)^* a$$

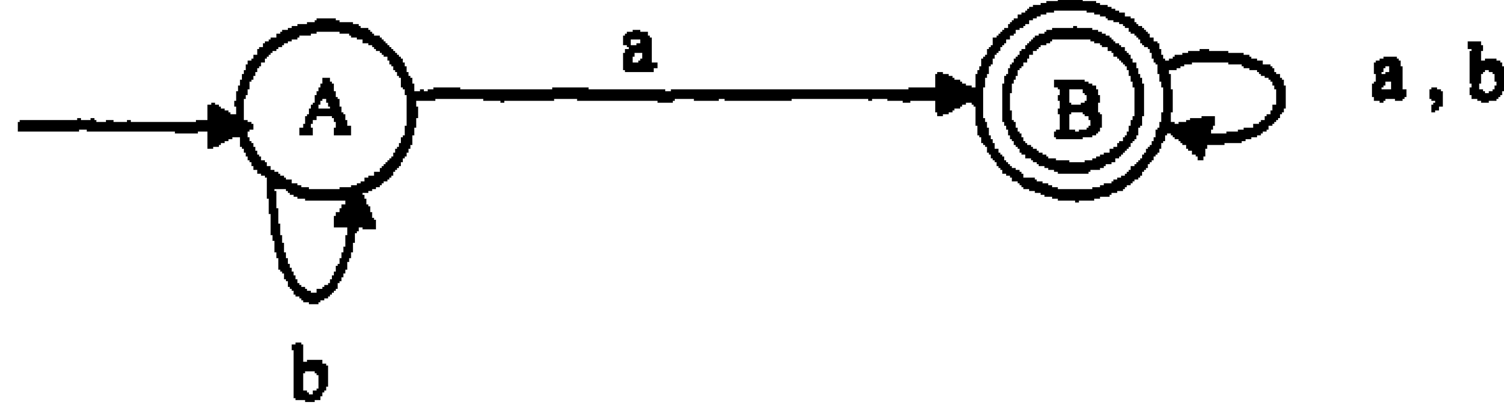
إذا أردنا الحصول على وصف لغوي أدق وبالتالي على مصطلح نظامي، لوجب أن نفكر في عملية المتمم (النفي). الكلمة λ لا تنتهي بالحرف a ، ولذا λ تنتمي إلى $L(M)$. كذلك جميع الكلمات التي تنتهي بحرف b تندرج ضمن المجموعة التي لا تنتهي بالحرف a. هذان هما الاحتمالان الوحيدان للنفي. إذاً، الكلمات المقبولة هي التي تنتهي بالحرف b أو λ. كمصطلح نظامي نكتب

$$L(M) = (a \vee b)^* b \vee \lambda$$

سنتطرق الآن إلى حالات أخرى للآلات ذات حالتين باستخدام حرفين. الحالة الأولى كالتالي:



أحياناً، يدمج سهمان معاً إذا كانا في نفس الاتجاه، وبالتالي الرسم التالي هـــو رســم مكافئ للآلة:



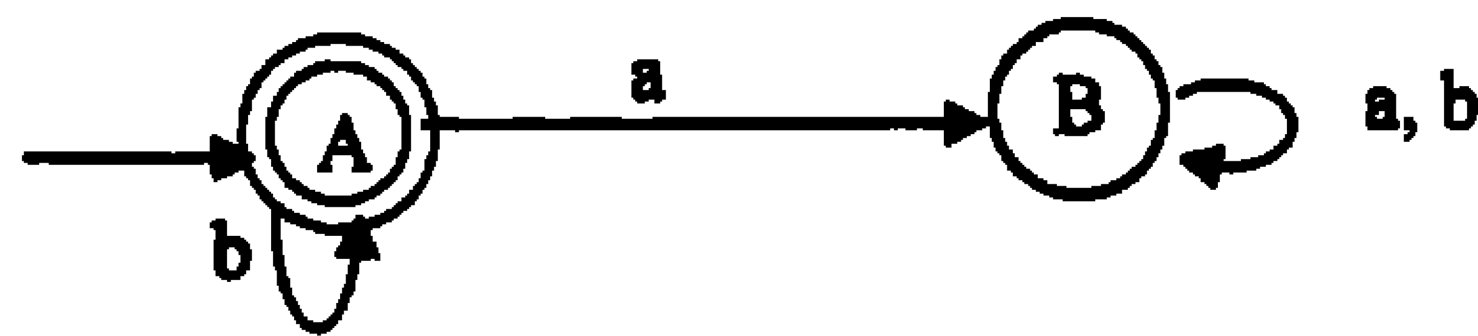
نحن ذكرنا أن حرف b لن يلعب دوراً يذكر لأن أســهمه انعكاسـية. إذاً، ســنركز تفكيرنا على حرف a. إن احتواء الكلمة الداخلة إلى الآلة على حرف a واحد سيؤدي إلى تحركنا نحو حالة القبول. في حال وصولنا إلى حالة القبول لا يمكن الخروج منــــها باستخدام حرف a ثاني لأن سهم a انعكاسي في حالة القبول. عملياً، الحالة B هـــي مصيدة لا يخرج من يدخل إليها لأن جميع أسهمها انعكاسية. إذاً، يمكـــن القـول أن حرف a واحد كفيل لنا بالوصول إلى مصيدة قبول. أي، أول حرف a يأتي في الكلمة يوصلنا إلى القبول وتبقى الكلمة مقبولة مهما أتى بعد ذلك مـــن حـروف a أو b. كوصف لغوي للكلمات المقبولة نقول أنها كلمات تستخدم a و b بحيث تحتوي علــى حرف a. لا داعي للتأكيد بأنه حرف واحد على الأقل لوضوح النـص. كمصطلـح نظامي يمكن كتابة

$$b^* \, a \, (a \vee b)^*$$

للدلالة على أن الكلمة المقبولة قد تبدأ بعدد من حروف b ثم يأتي حرف a المنشـــود للوصول إلى القبول. بعد حرف a يسمح لأي شيء بالقدوم فهو لا يضـــير. بعــض العلماء يفضل التعبير من خلال المصطلح التالي عن نفس المضمون:

$$(a \vee b)^* \; a \, (a \vee b)^*$$

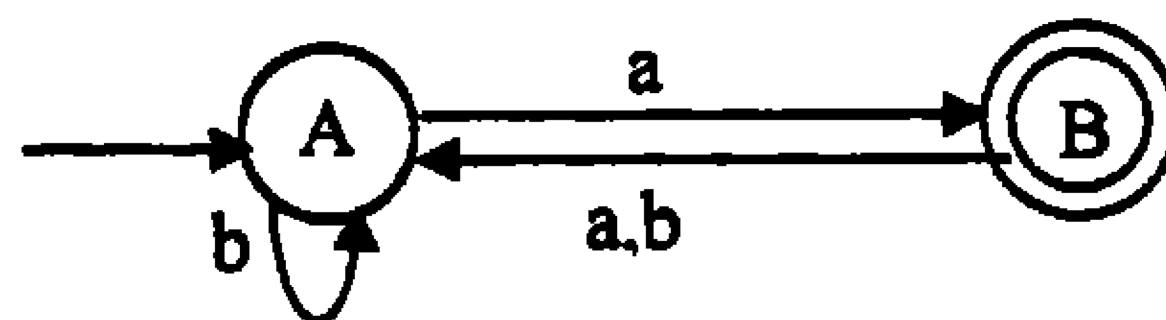
بمعنى أنه يوجد حرف a واحد مثبت نحتاج إليه بالضرورة داخل كل كلمة مقبولة. ما سيأتي قبل هذا الحرف أو بعده سيان. يمكن الآن بسهولة التأكد من أن الآلة التالية:



لها اللغة التالية:

$$L(M) = b^*$$

الحالة الثانية التي تهمنا هي حالة الآلة التالية:



سنبدأ بكتابة الكلمات المقبولة التي لا يزيد عدد حروفها عن أربعة مرتبة ترتيباً قاموسياً:

a, ba, aaa, aba, bba,
aaba, abba, baaa,
baba, bbba

بعد إمعان النظر وتدقيقه يمكن معرفة أن الصفة المشتركة هي انتهاء الكلمة بعدد فردي من حروف a (واحد أو ثلاثة). لتفسير أن هذا فعلاً هو ما يميز الكلمات المقبولة عن الكلمات المرفوضة نقول: إذا بدأت الكلمة بمجموعة من حروف b فإنها ستبقى في حالة الرفض A. إذا أتى حرف a فإنه سيحركنا إلى حالة القبول B . إذا أتى أي حرف بعد حرف a الأول سيعيدنا إلى الرفض حيث نواجه احتمالان:

أ- يأتي حرف a ثالث بعد الثاني ونعود إلى القبول.

ب- يأتي حرف b فنبقى نراوح مكاننا في حالة الرفض.

ما سيحدث في حال وقوع الاحتمال أ هو بالضبط إعادة الوضع إلى ما كان عليه عند قدوم حرف a الأول، أما ما سيحدث في حال وقوع الاحتمال ب فهو بالضبط إعادة

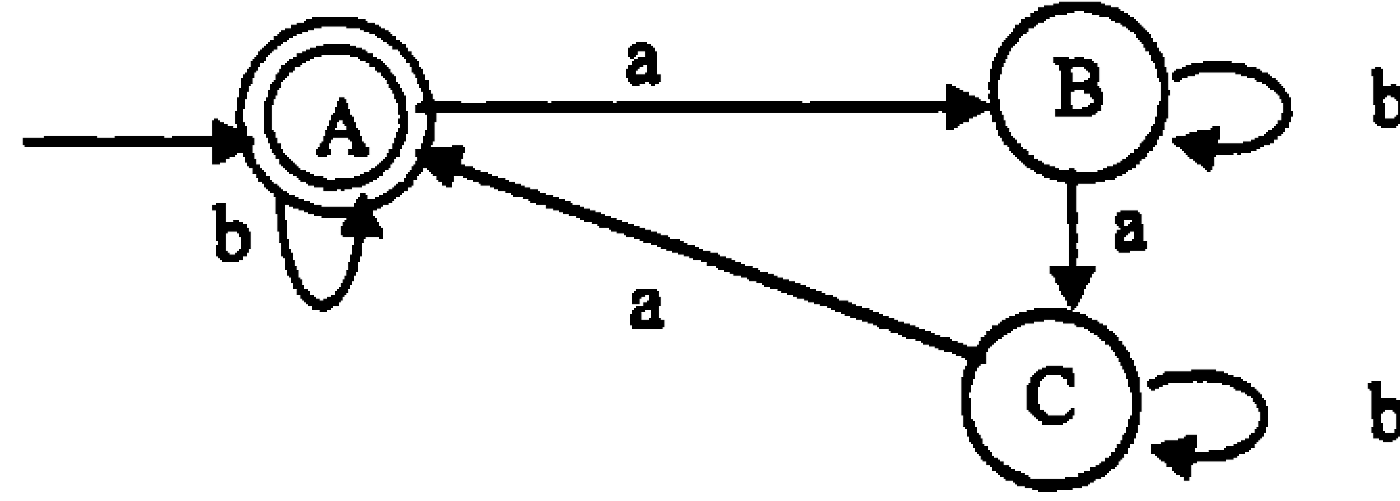
الوضع إلى ما كان عليه في حال وجود حروف b عند البداية. بمعنى آخر، حـــروف b تعمل دائما على إعادتنا إلى نقطة البداية وهي حالة الرفض. أما حروف a فواحد منـــها يكفي للوصول إلى القبول وكل زوج من حروف a يقوم بعمل دورة من المكان الـذي نتواجد فيه إليه. فلو كنا في القبول لعدنا بعد دورات أزواج حـــروف a إلى القبـــول وإذا كنا في الرفض لبقينا هنالك. أي إذ أتى عدد زوجي من حروف a في نهاية الكلمة ستبقى الكلمة مرفوضة وإذا أتى عدد فردي من حروف a في نهاية الكلمة فسـنكون في حالة القبول. رياضيا، نكتب

$$L(M) = (a \vee b)^* (aa)^* a$$

الفصل الخامس

الآلات ذات ثلاث حالات

توجد تطبيقات تحتاج إلى آلات مكونة من أكثر من حـــالتين. دراســـة طبيعـــة الكلمات المقبولة في هذه الحالة تكون بالطبع أصعب وأحياناً عملية معقدة جداً. مثـــلاً، سندرس الآلة التالية ذات الحالات الثلاث باستخدام حرفين a و b:



بما أن حالة البدء (التشغيل) هي حالة قبول، إذاً أبسط كلمة مقبولة هـــي λ. أســـهم الحرف b جميعها انعكاسية ولذلك حروف b يمكن أن تأتي في الكلمات المقبولة أينمـــا شئنا دون مشاكل. نلاحظ أن ثلاثة حروف a تقوم بعمل دورة كاملة داخل الآلة. أي إذا احتوت الكلمة على ثلاثة حروف a فقط سيؤدي هذا إلى انطلاقنا من A والعـــودة إلى A فتكون الكلمة مقبولة. وإذا كان عدد حروف a داخل الكلمة بالضبط ستة فـإن الكلمة أيضاً مقبولة. الخلاصة أن عدد حروف a داخل الكلمة المقبولة يجب أن يكـــون من مضاعفات العدد 3 وهي

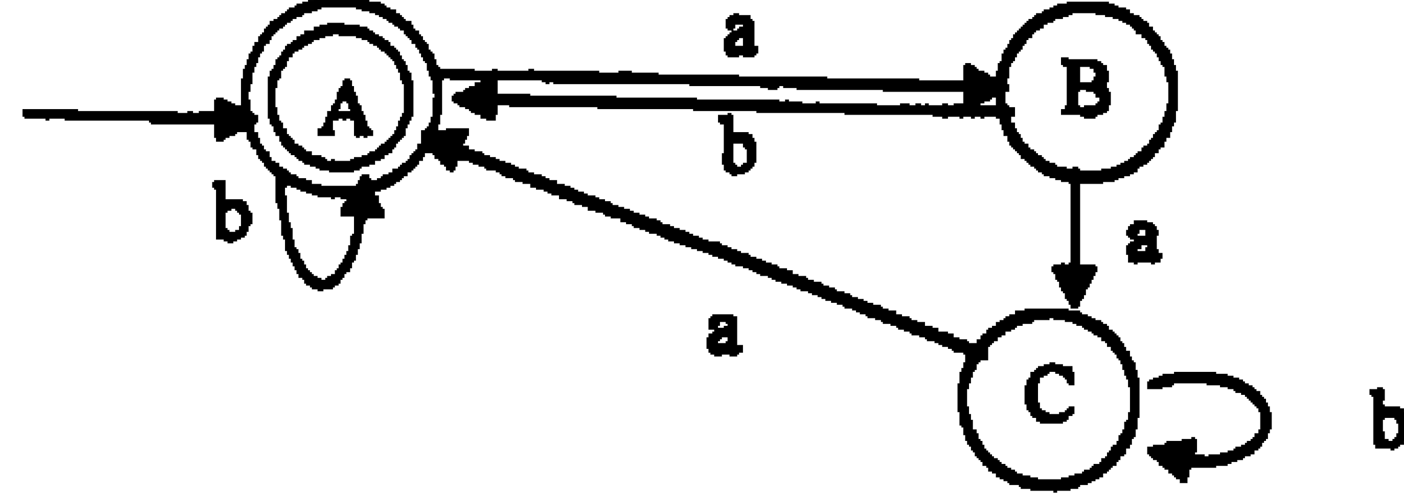
$$0 , 3 , 6 , 9 , 12 , \ldots$$

أي لغة الآلة هي

$$L (M) = (b^* ab^* ab^*a)^* b^*$$

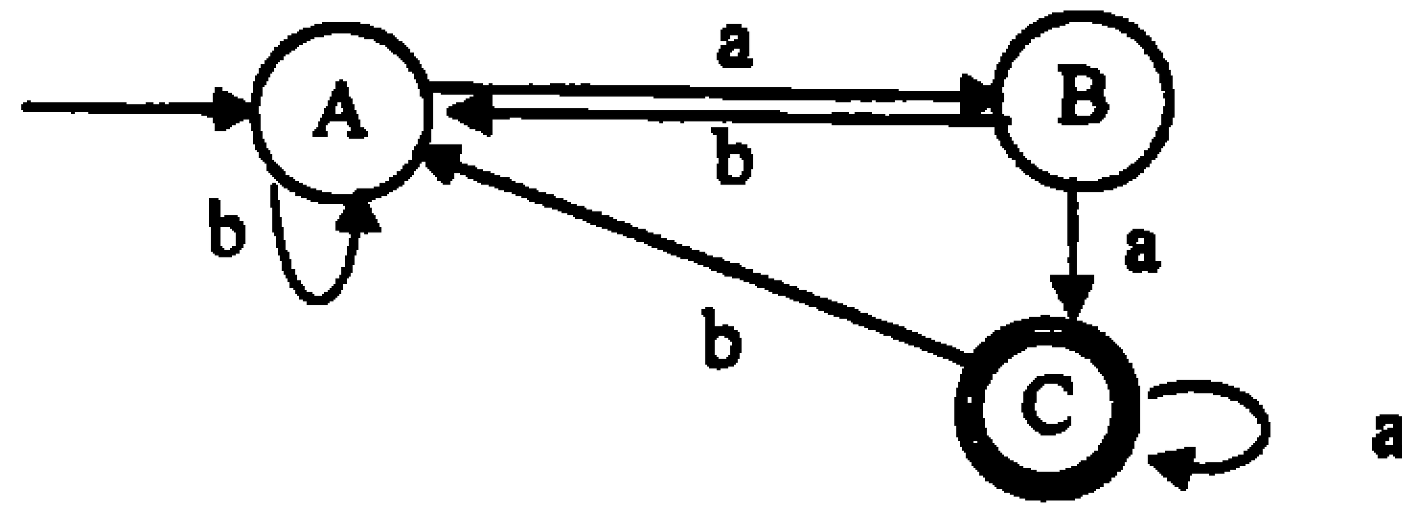
إن تغيير اتجاه سهم واحد داخل الآلة السابقة قد يؤدي إلى وضع شديد التعقيد.

مثلا، لو نظرنا إلى الآلة التالية:

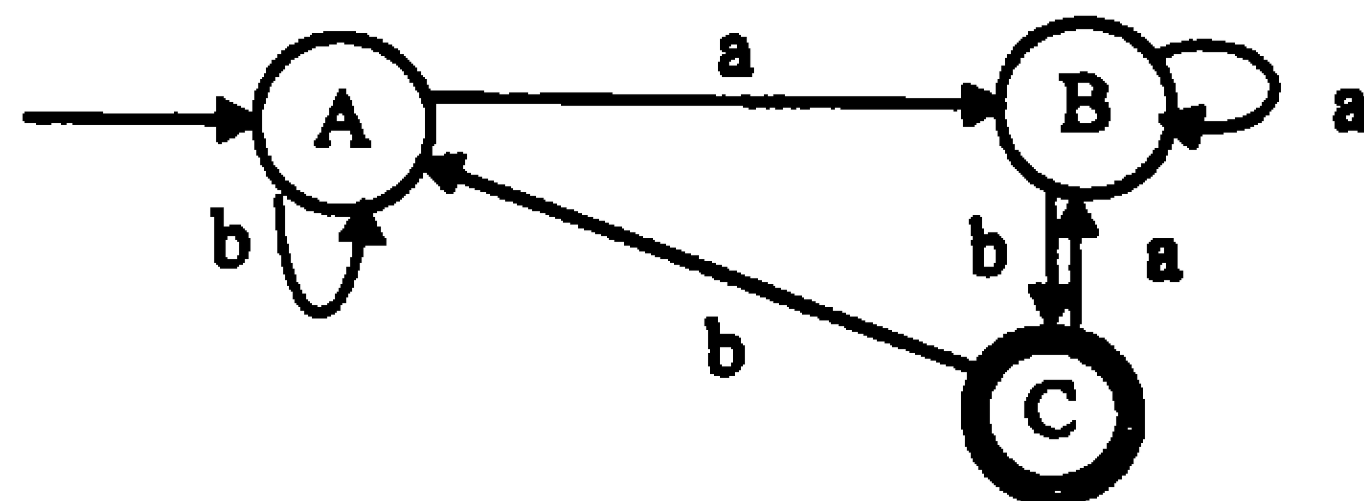


لا يوجد لدى المؤلف أية إجابة واضحة ومحددة حول طبيعة الكلمات المقبولة بشكل عام. يمكن للطالب أن يحاول دراسة الكلمات المقبولة البسيطة المكونة من عدة حروف ومحاولة استنباط الصفة المميزة.

الآلة قبل السابقة كانت تشبه من ناحية مبدأ التصميم الآلة ذات الحالتين التي تقبل كلمات فيها عدد زوجي من حروف a. يمكن أيضا تصميم آلات ذات ثلاثة حالات تقبل كلمات لها نهاية محددة. مثلا، سنرسم الآن آلة تقبل الكلمات التي تنتهي بالمقطع aa:

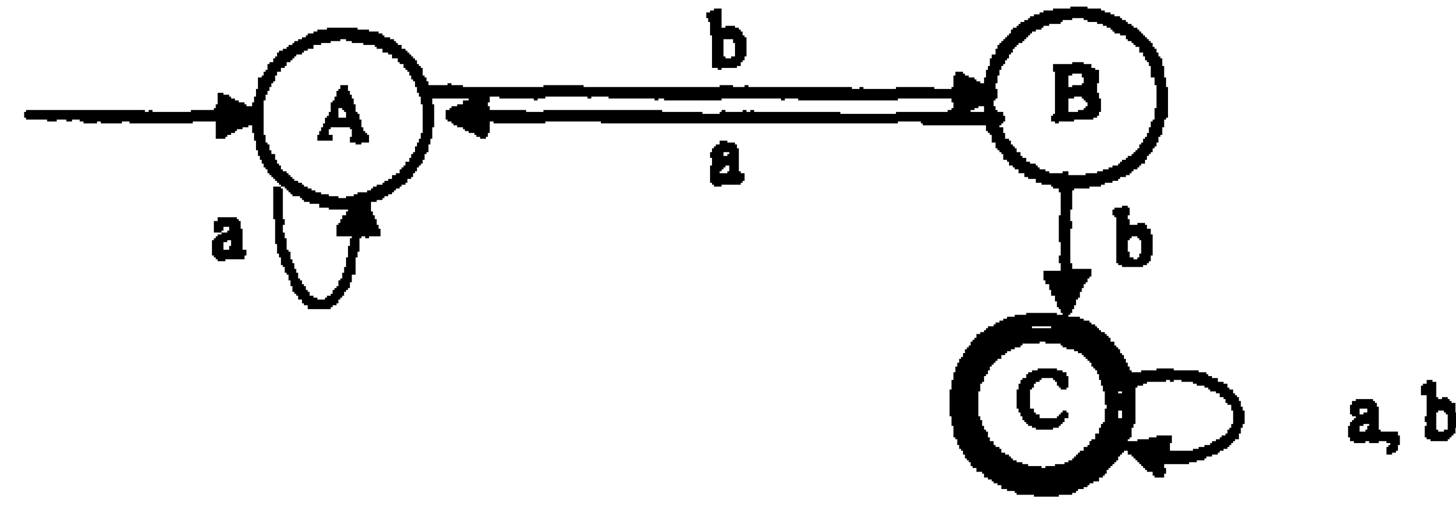


واضح أن أسهم الحرف b تعود جميعها إلى نقطة الانطلاق A.لكن، إذا طلبنا أن تكون الكلمات المقبولة لها النهاية ab ، فإن الوضع سيختلف قليلا. عندئذ نحصل على التصميم التالي:

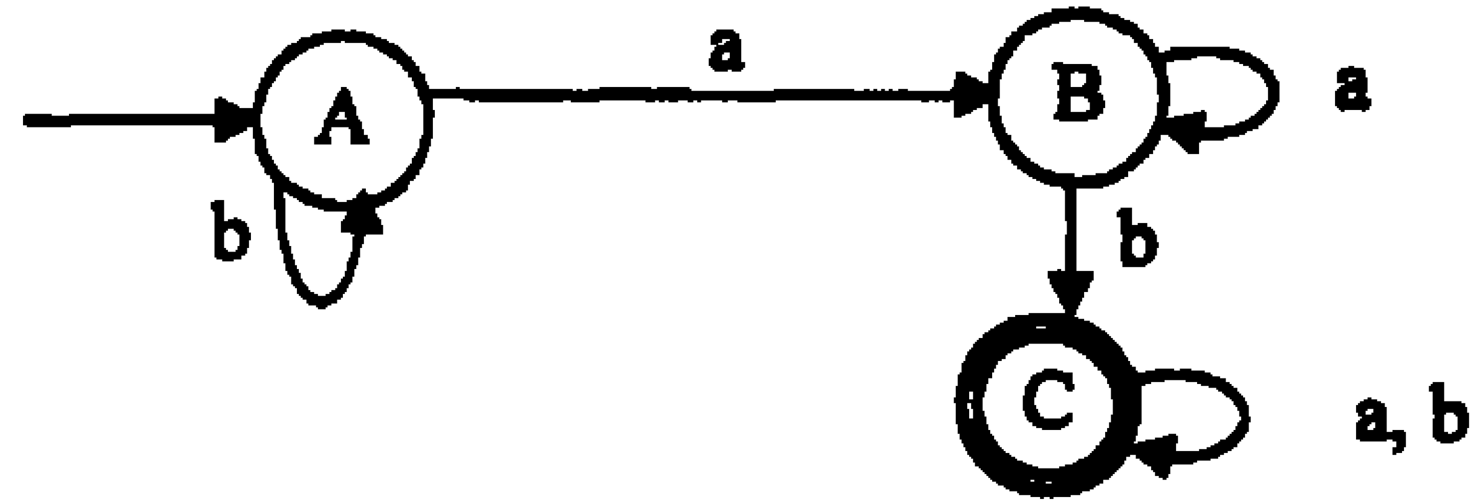


يتضح بسهولة أن الكلمة ab هي أبسط كلمة مقبولة. سهم حرف b المنطلق من الدائرة A انعكاسي لأن الكلمة ستبدأ من هنالك بالانتهاء من خلال استخدام آخر حرفين a ثم b للوصول إلى القبول. سهم حرف a المنطلق من B أيضاً انعكاسي لأن الكلمة قد تنتهي بالحرفين a ثم b دون البدء من A. كمثال على ذلك aab. هذه الكلمة انطلقت من A بالنهاية الصحيحة المبتدئة بحرف a، ولكن حدث أن أتى حرف a جديد. لا داعي للعودة بل يجب الانتظار لأنه قد يأتي حرف b (كما حصل فعلاً) ونصل إلى القبول. aab تنتهي كما هو مطلوب بالمقطع ab وكانت الحالة B بمثابة محطة انتظار. أي أن حروف a المحتملة بعد حرف a لا تستوجب البدء من جديد. بينما حرف b المحتمل بعد قدوم المقطع ab سيعمل على إفساد كل شيء والعودة إلى البداية. فلو أخذنا الكلمة abb لوجدنا أنها مرفوضة ولكي تصبح مقبولة يجب إضافة المقطع ab كاملاً في نهايتها. لذا، نرسم سهم حرف b المنطلق من C في الآلة عائداً إلى البداية A. أما سهم حرف a المنطلق من C يعود إلى B لأن تعديل الكلمات المرفوضة بسبب نهايتها بحرف a هو إضافة حرف b. مثلاً، الكلمة aba كلمة مرفوضة ويتم إضافة حرف b في النهاية لكي تصبح كلمة مقبولة. لذا، الانتهاء بحرف a لا يستدعي العودة إلى البداية ولكن نقوم ذهنياً بعمل مسار من C إلى B و عودة إلى C من خلال المقطع ab. هذا المسار يشبه المسار من A إلى B إلى C الذي يمثل المقطع ab. نود التذكير هنا بأن كل حالة (دائرة) يجب أن ينطلق منها سهمان واحد لحروف a والآخر لحرف b. للتأكد من أن الآلة تقبل الكلمات المنتهية بالمقطع ab يمكن تجربة عدة كلمات مقبولة والأخرى مرفوضة كأن نفحص جميع الكلمات ذات ثلاثة أو أربعة أو خمسة حروف.

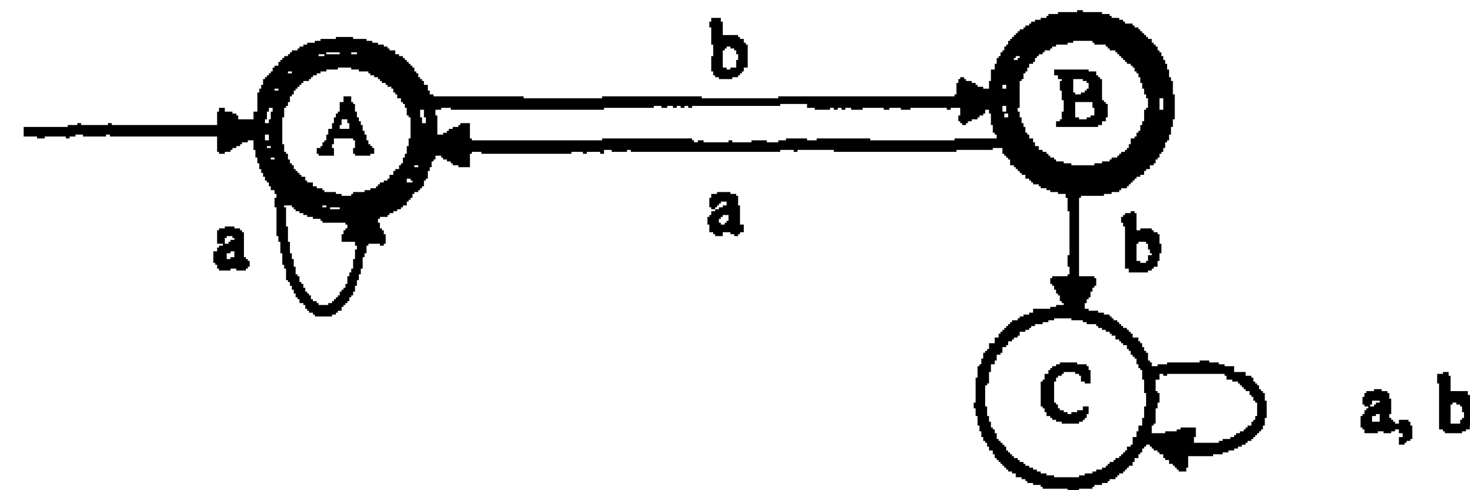
كما في حالة الآلة ذات حالتين توجد آلات تقبل كلمات محتوية على مقطع ما. مثلاً، الآلة التي تقبل كلمات محتوية على المقطع bb هي



المبدأ واضح حيث يوجد لدينا حالة قبول على صورة مصيدة. أية عثرة في أثناء تشكيل المقطع bb تقودنا إلى البداية. لو طلبنا أن تقبل الآلة الكلمات المحتوية على المقطع ab لاختلف الوضع. هنا نقوم بتصميم الآلة كالتالي:



سهم حرف a المنطلق من B أصبح انعكاسي للدلالة على أن B أصبحت محطة انتظار. وبالتالي الكلمة aab تكون مقبولة كما شرحنا سابقا. لو نظرنا إلى الآلة التالية:

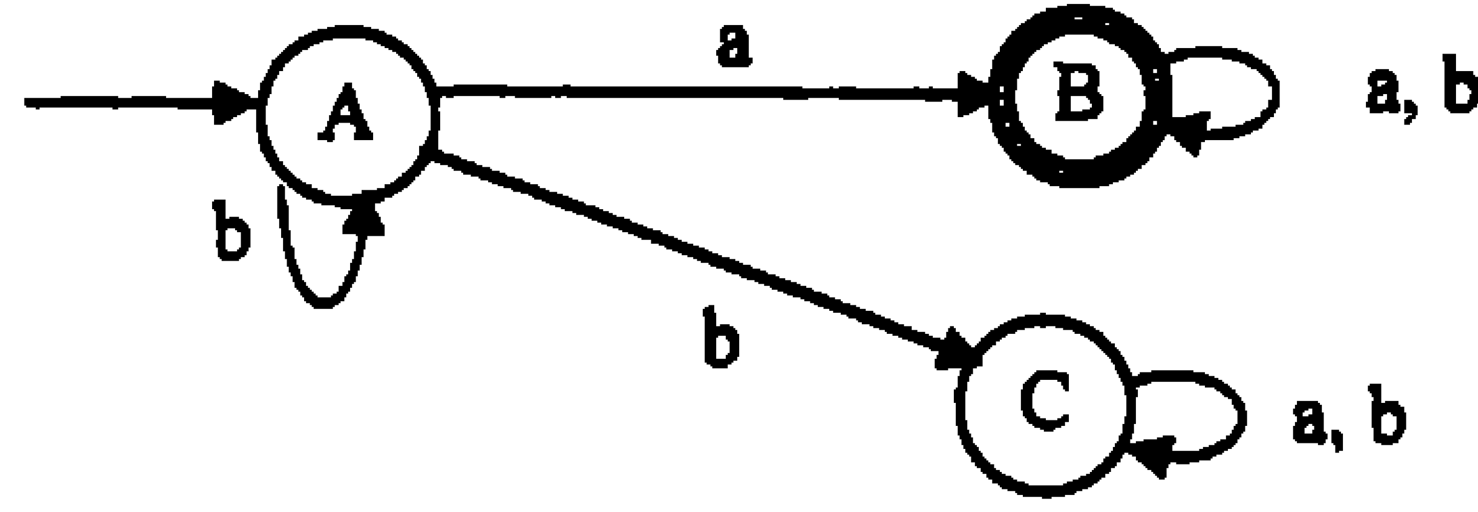


لعرفنا بأنها آلة متممة للآلة التي تقبل كلمات محتوية على المقطع bb. لذلك، هذه الآلة تقبل كلمات لا تحتوي على المقطع bb. بمعنى آخر

$$L(M)= a^* (a^* ba^* a)^* ba^* \vee a^*$$

كما جاء في المثال التاسع من الفصل الثالث.

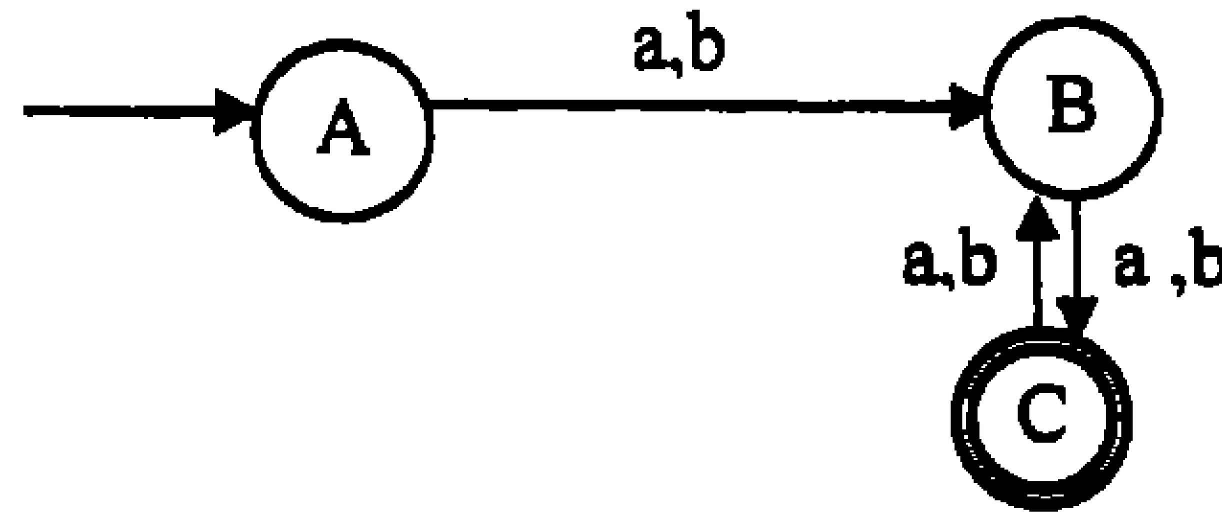
توجد حالة جديدة في موضوع الآلات ذات الحالات الثلاث. كمثال على هذا النوع سندرس الآلة:



إذا بدأت الكلمة بحرف a فسنذهب إلى مصيدة القبول حيث لا مخرج. بمعنى أن البدء بحرف a يضمن لنا قبول الكلمة بغض النظر عن ما سيأتي لاحقا. وكذلك البدء بحرف b سيؤدي بنا إلى الوصول إلى مصيدة رفض. إذا، الكلمة المبتدئة بحرف b ستكون مرفوضة مهما أضفنا من أحرف بعد ذلك. وبالتالي نستطيع القول عن الآلة السابقة أنها تقبل الكلمات التي تبدأ بحرف a. رياضيا، نكتب

$$L(M) = a(a \vee b)^*$$

ختاما في هذا الفصل سنتناول تصميم بسيط لآلة لا تهتم باختلاف الحروف. هذه الآلة هي



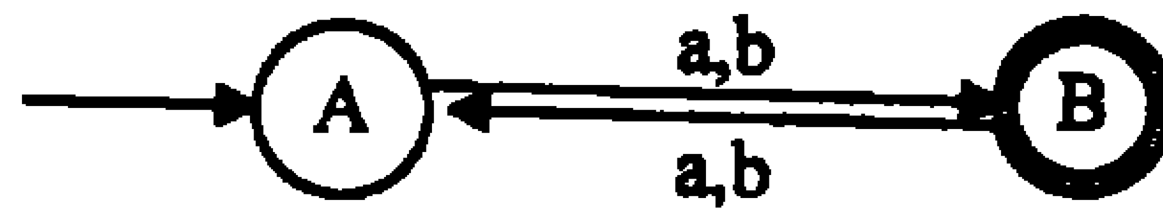
إنها تقبل جميع الكلمات المكونة باستخدام a و b بحيث يكون عدد الحروف فيها زوجي باستثناء λ. أي نكتب بالرموز

$$L(M) = (aa \vee ab \vee ba \vee bb)^* (aa \vee ab \vee ba \vee bb)$$

إذا أردنا أن نشمل كلمة λ نصمم الآلة كالتالي:



أما إذا قلبنا وضع الحالتين كالتالي :



فإننا نحصل على آلة تقبل كلمات فيها عدد فردي من حروف a أو b ، أي

$$L(M) = (aa \vee ab \vee ba \vee bb)^{*} (a \vee b)$$

الفصل السادس

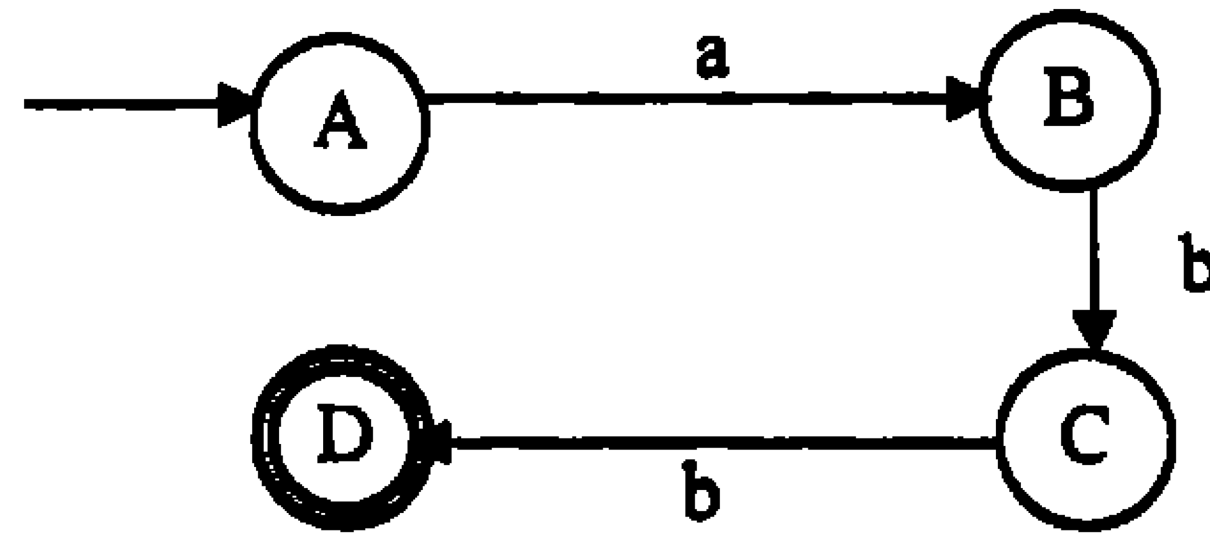
الآلات الكبيرة

نقصد هنا بالآلات الكبيرة تلك الآلات ذات الحالات المحدودة التي يتواجد فيها أكثر من ثلاث حالات أو نستخدم فيها أكثر من حرفين. توجد هنا إمكانيات أكبر لتصميم الآلات تقبل كلمات بصفات محددة جدا. يمكن مثلا تصميم آلة تقبل كلمات تستخدم a و b بحيث تحقق الشرطان:

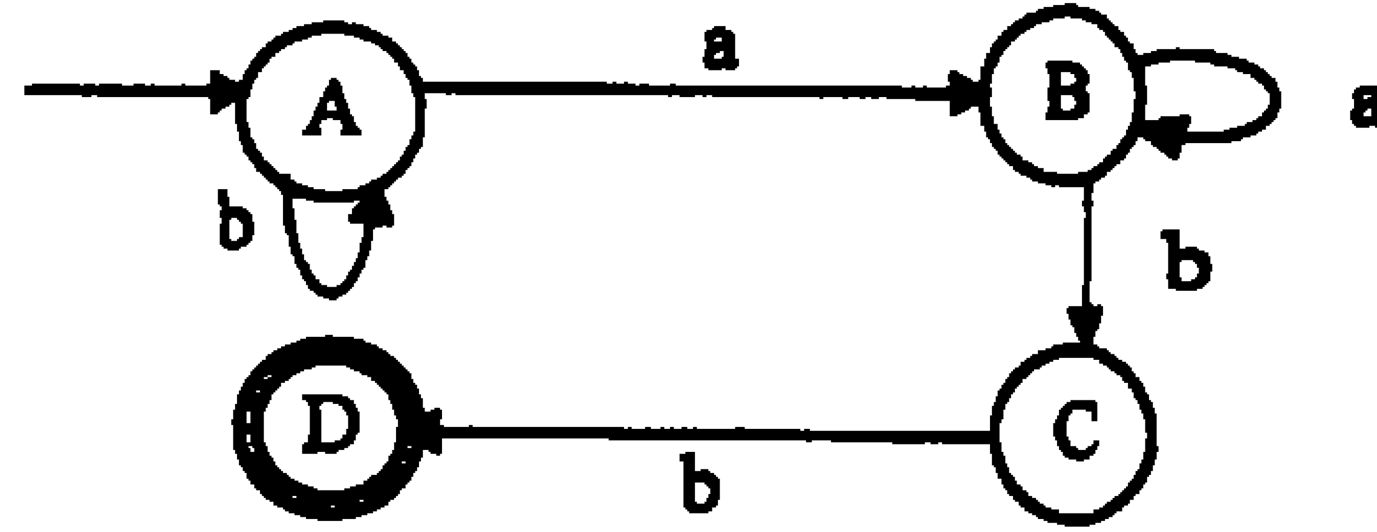
أ- تحتوي على المقطع ab،

ب- تنتهي بالمقطع bb.

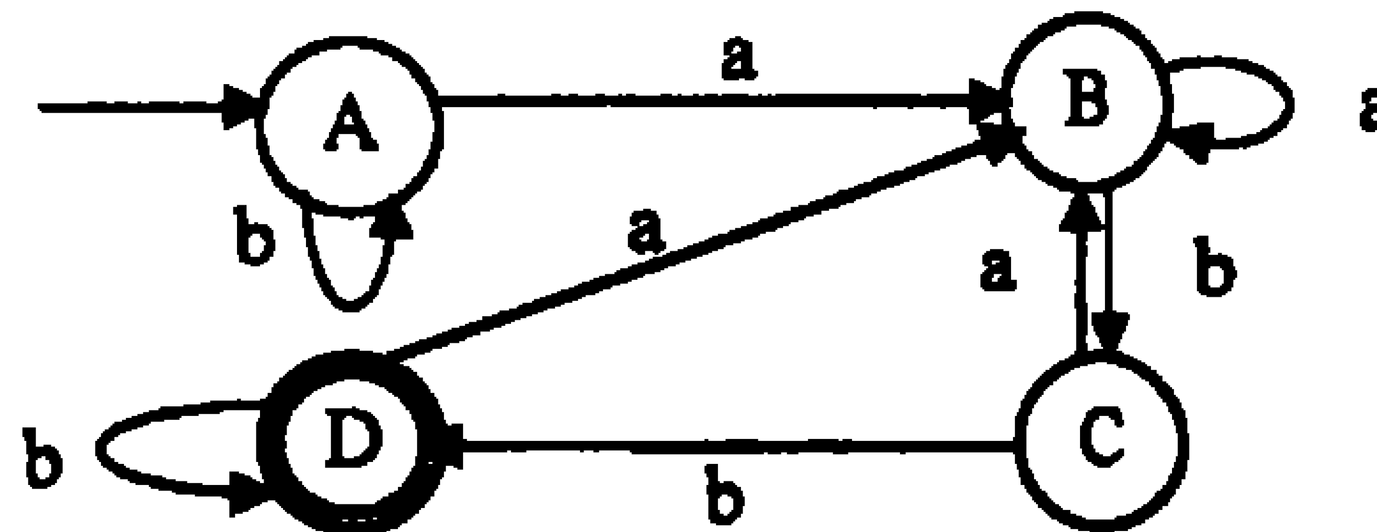
أبسط كلمة مقبولة ينطبق عليها الوصف هي abb. سنرسم هذا المسار داخل الآلة على أنه المسار الرئيسي بين أربع حالات كالتالي:



يجب الآن إضافة أسهم بحيث ينطلق من كل دائرة سهم يحمل حرف a وسهم يحمل حرف b. إذا كنا في حالة البدء A وأتى حرف b فإن هذا لا يحقق الشرط أ على الإطلاق. ولذا، ينبغي البقاء في حالة البدء بانتظار حرف a. بعد قدوم حرف a قد يتبعه حرف a آخر. في هذه الحالة نبقى في عملية انتظار حرف b ليتحقق الشرط الأول أ. هذا معناه أن ننتظر في الحالة B حيث نكون قد قطعنا نصف الشوط في تشكيل المقطع ab. أي يفترض أن تكون الآلة كالتالي:



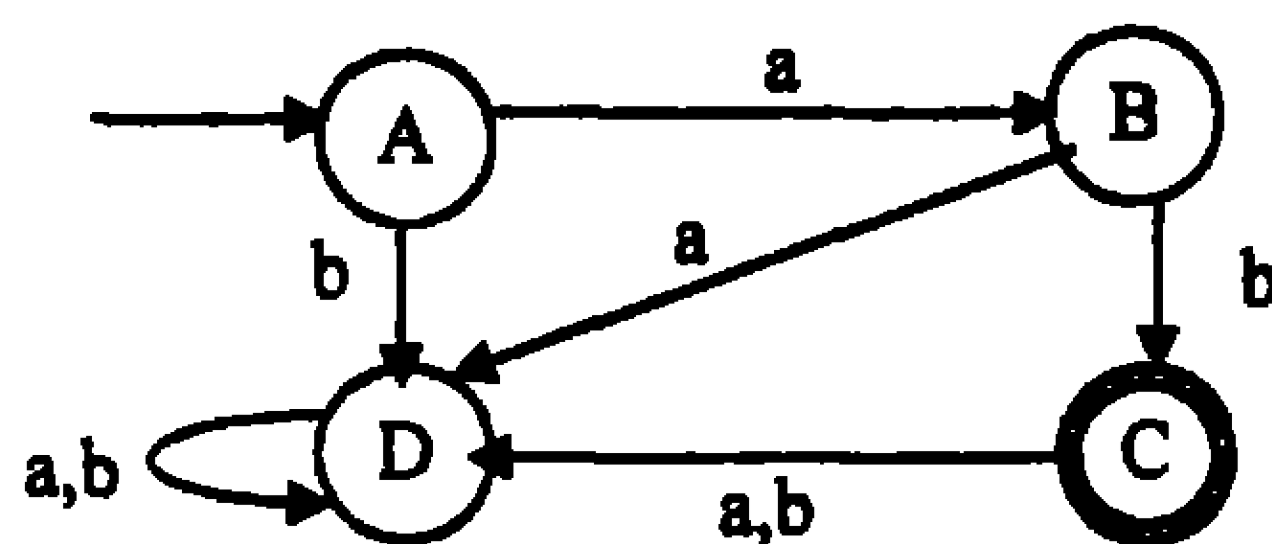
ينقص هذه الآلة ثلاثة أسهم. إذا وصل المرء الحالة C فإنه يكون قد حقق الشرط الأول من خلال الكلمة المستخدمة وبقي عليه أن يضيف أحرف مناسبة لتحقيق الشرط الثاني. إذا أضاف حرف b وصل القبول، أما إذا أضاف حرف a (كأن يقول aba) فإنه يتوجب عليه البدء مجددا في تشكيل النهاية bb. لذا يعيدنا حرف a من الحالة C إلى الحالة B. إذا كنا في الحالة D فإن حرف b إضافي في نهاية الكلمة لا يضر. مثلا، الكلمة abbb مقبولة كالكلمة abb. أي سهم حرف b من الدائرة D انعكاسي. أما سهم حرف a فإنه يضطرنا إلى إعادة تشكيل النهاية bb من جديد، وبالتالي العودة إلى الحالة B. لاحظ أننا في المرحلة الأخيرة لم نعر اهتماما للشرط الأول لأنه إذا تحقق مرة واحدة فلا يضر ما يحدث بعد ذلك. خلاصة تفكيرنا يعطينا الآلة في الصورة النهائية كالتالي:



لاكتمال الشرح نقول أن لغة هذه الآلة هي

$$L(M) = (a \vee b)^* ab (a \vee b)^* bb$$

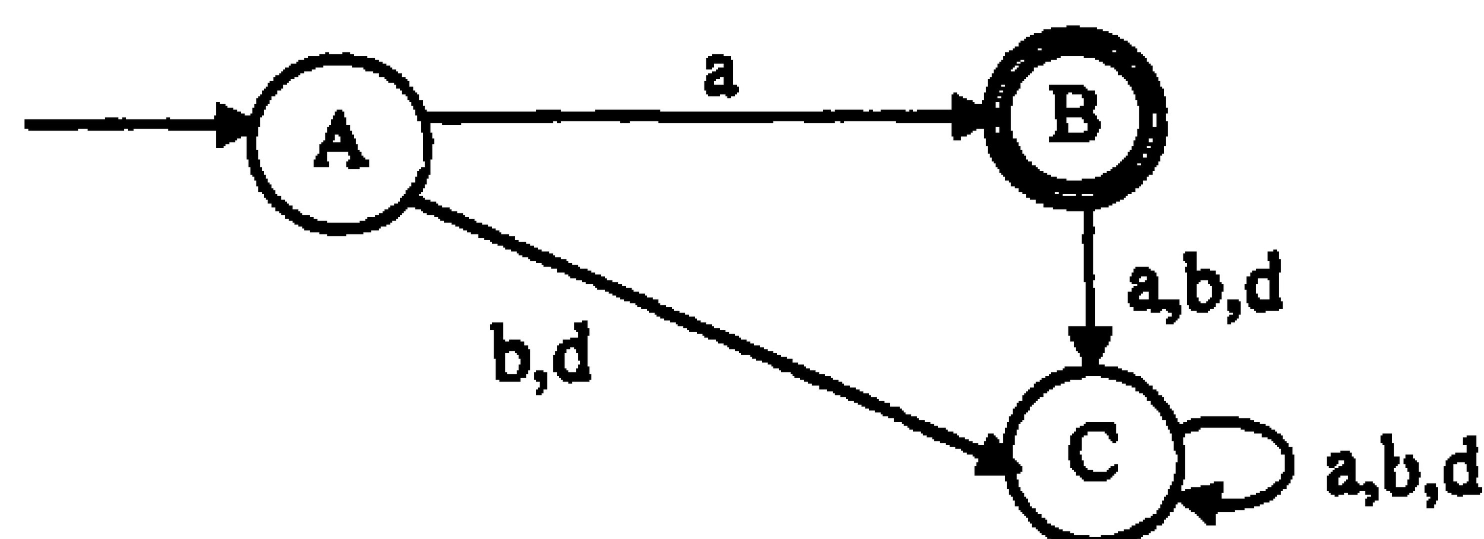
يوجد نوع آخر مهم يتم تصميمه باستخدام حالات عديدة. مثلا،



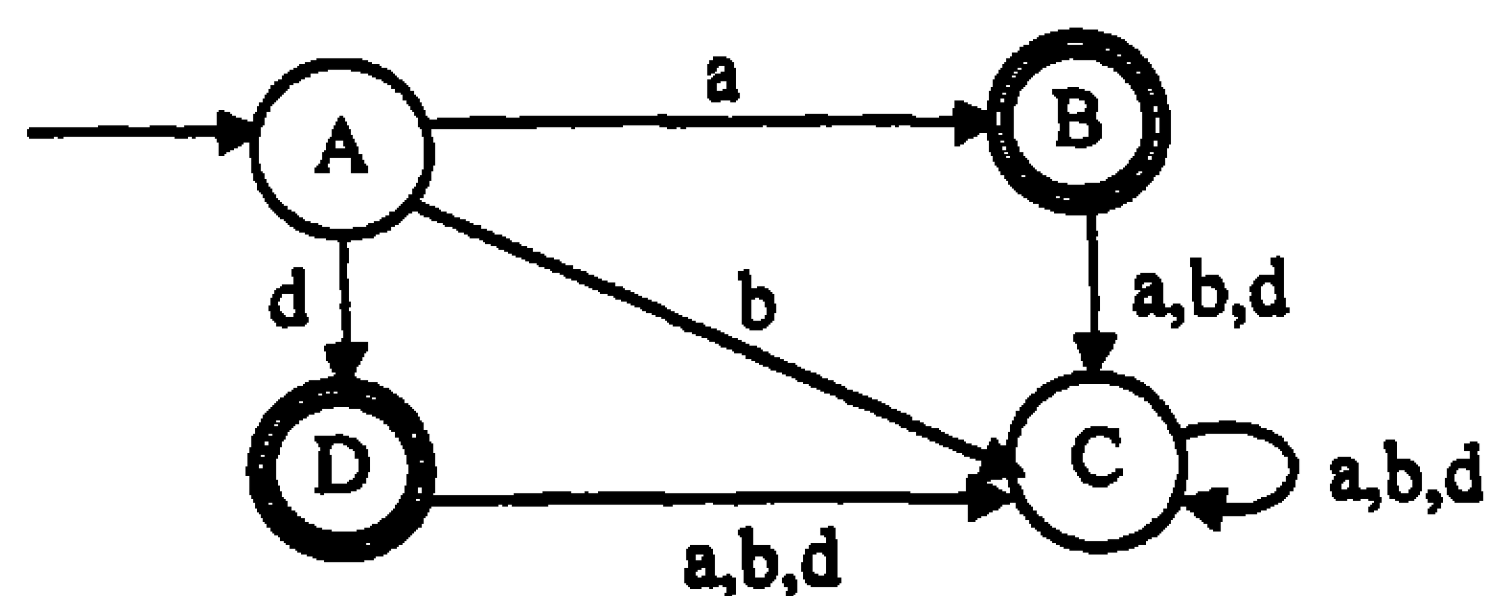
توجد في الآلة مصيدة رفض (الحالة D). إذا بدأت الكلمة بحرف b انتهى بنا المطاف داخل مصيدة الرفض. إذا بدأت الكلمة بحرف a و أتى بعده حرف a آخر نلاقي نفس المصير. أما إذا تلى حرف a الأول حرف b فنصل إلى القبول. إن قدوم أي حرف ثالث بغض النظر عن ماهيته يدخلنا مصيدة الرفض. مما سبق نستنتج وجود كلمة وحيدة مقبولة وهي ab. بمعنى آخر

$$L (M) = \{ab\}$$

في هذه الحالة يقال أن الآلة تتعرف على الكلمة ab. أي لو كانت ab كلمة سرية تسمح لنا بدخول موقع ما، فإن هذه الآلة لا تدخلنا إلى الموقع المطلوب سوى عند إعطائها كلمة ab مرة واحدة وبشكل صحيح. كمثال آخر على هذا النوع لدينا الآلة:



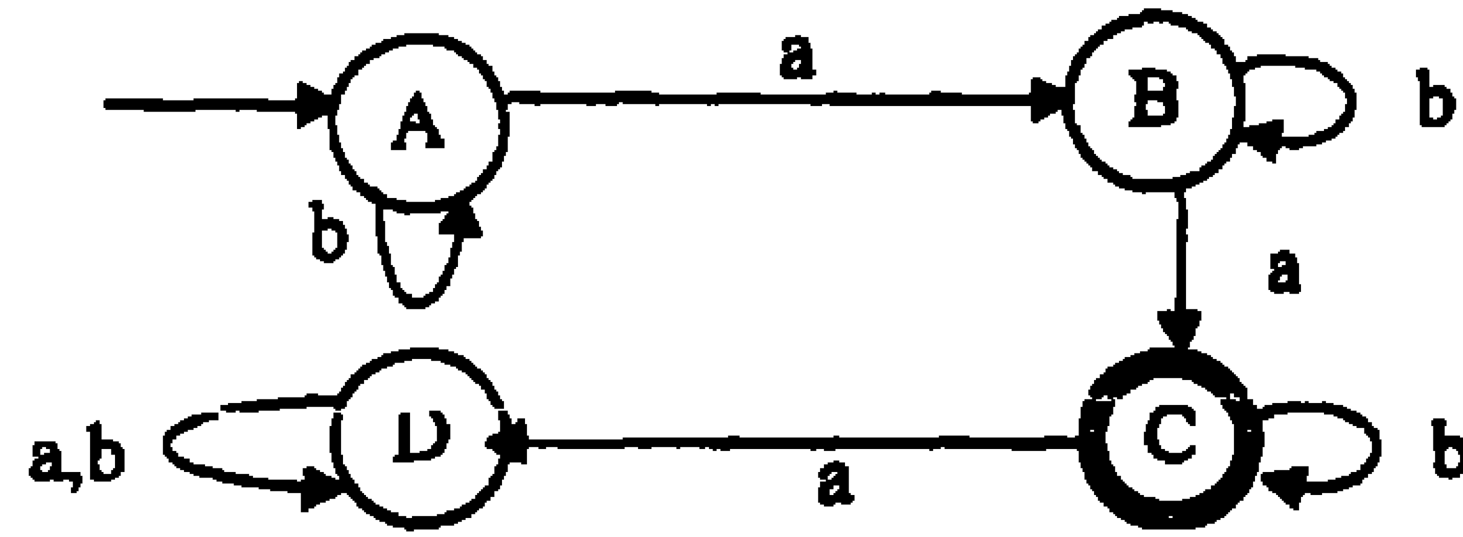
هذه الآلة تتعرف على كلمة a من بين جميع الكلمات المستخدمة للحروف الثلاثة: d , b , a. وكمثال ثالث لننظر إلى



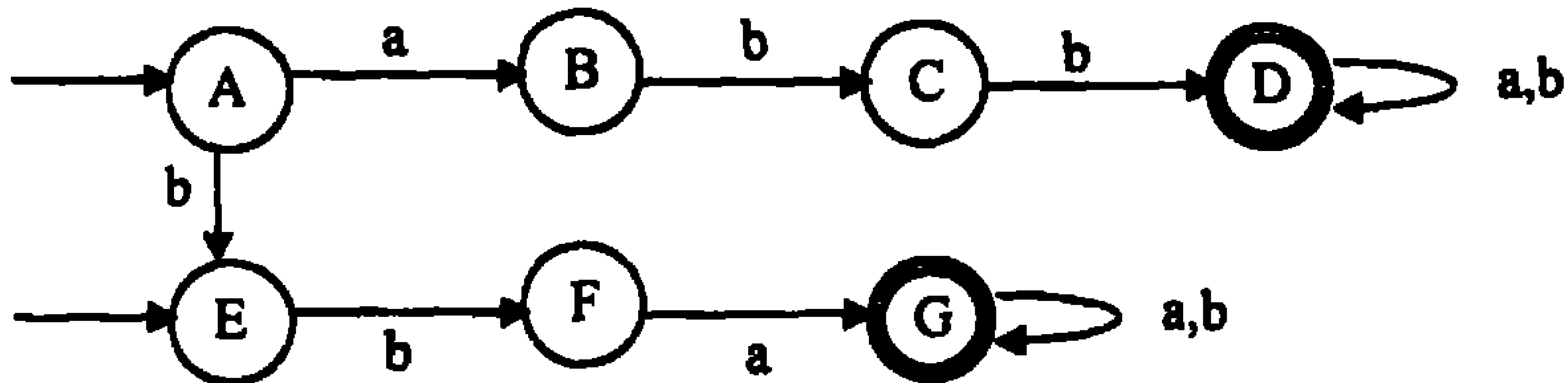
هذه الآلة تتعرف على كلمتين وهما الكلمة a والكلمة d. أي

$$L(M) = \{ a, d\}$$

سنتعرف الآن على آلة تقبل كلمات عدد أحـــرف a المســـتخدمة في تكوينـــها بالضبط اثنان. أي يجب أن يكون هنالك مسار يؤدي إلى مصيدة رفض إذا توافـــر في الكلمة ثلاثة حروف a فأكثر. كما أن حرف a واحد يجب أن يبقينا علـــى الطريـــق الذاهب باتجاه القبول. للوصول إلى القبول يجب إكمال الطريق من خـــلال وجـــود حرف a ثاني. الحرف b لا يلعب دورا ولذلك تكون أسهمه جميعها انعكاســـية. إذا، الآلة هي

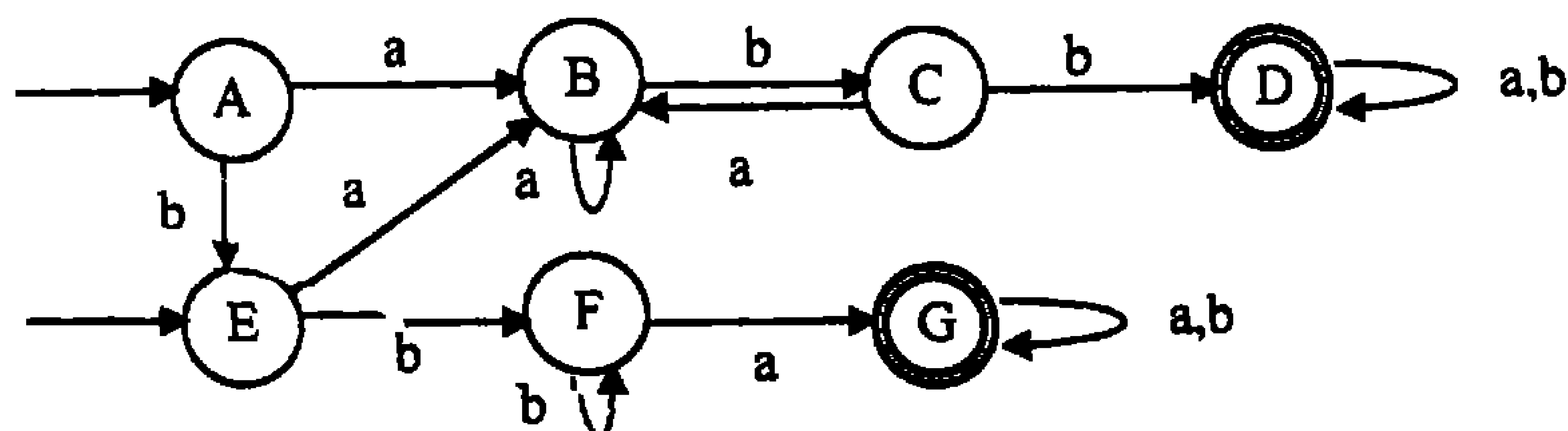


يتيح لنا كثرة عدد الحالات رسم عدة مسارات داخل آلة واحدة بحيث يعبر كـــل مسار عن احتمال جائز لطبيعة الكلمات المقبولة. مثلا، لو أردنا تصميم آلـــة تقبـــل كلمات تحتوي على المقطع abb أو المقطع bba. أي لدينا كلمتان مقبولتان فورا وهمـــا abb و bba. سنرسم لكل كلمة مسار داخل الآلة يؤدي إلى حالة قبول:

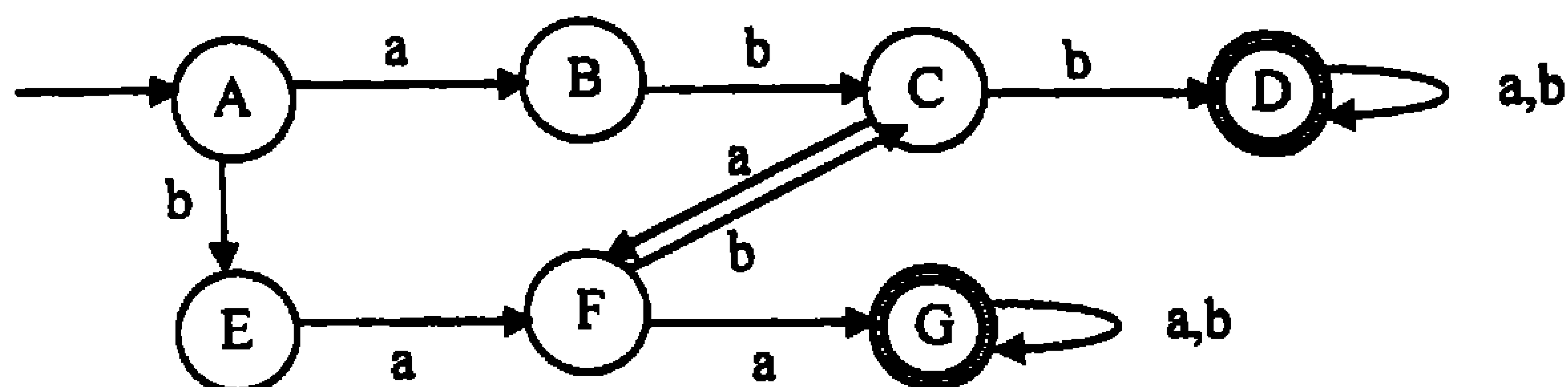


كما هو معروف في حال طلب الاحتواء على مقطع ما يجب أن تكون حالة القبـــول مصيدة. هنا يوجد لدينا حالتان قبولان للاحتمالان الجائزان. لكـــن، ســـتكون هنـــا

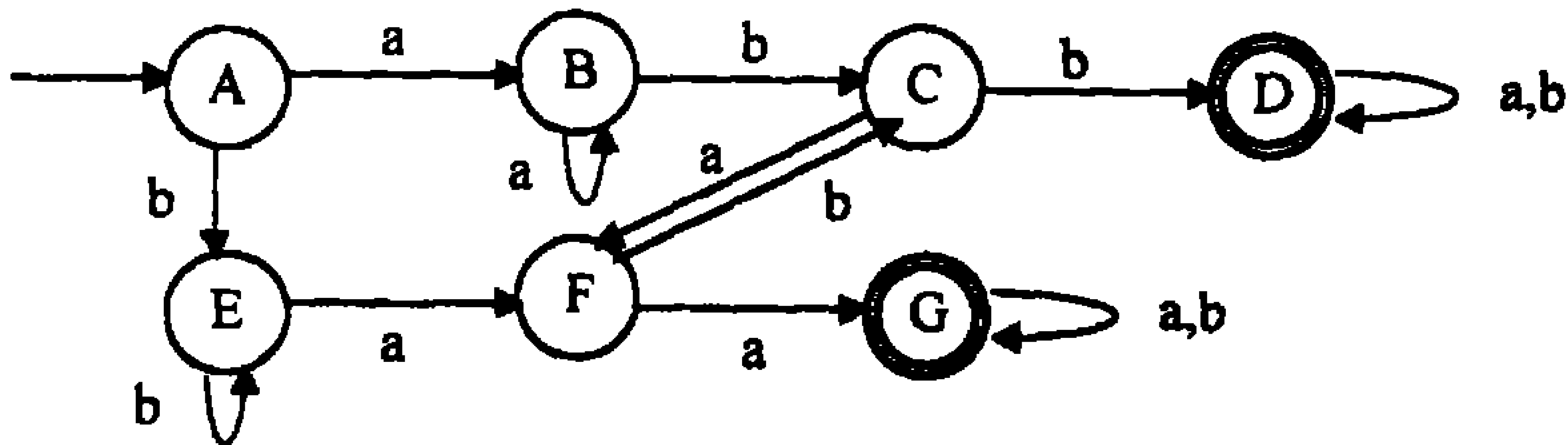
حالات يتفاعل فيها المساران معاً. مثلاً، الكلمة babb بدأت بحرف b وتتحرك الآلـــة بموجب ذلك في اتجاه E وكأن الكلمة ستكمل بحرف b آخر ثم a. لكن ما حدث هـو أن أتى المقطع abb الذي يفترض به أن يتحرك في المسار العلوي وليس السفلي. لـــذا، سنقفز من المسار السفلي إلى العلوي وتحديداً من E إلى B لأن من B نكمل باســتخدام حرفي b إلى القبول. بهذه الطريقة نحصل على مسار ثالث فرعي داخل الآلة مــن E إلى B إلى C إلى D للدلالة على المقطع abb. في الواقع هذا هو التفاعل الوحيد الممكـــن وسنضع بقية الأسهم لكل مسار من الاثنين الأساسيين كما هو معتاد في حالة الاحتواء على مقطع. لذا، نحصل على الآلة التالية:



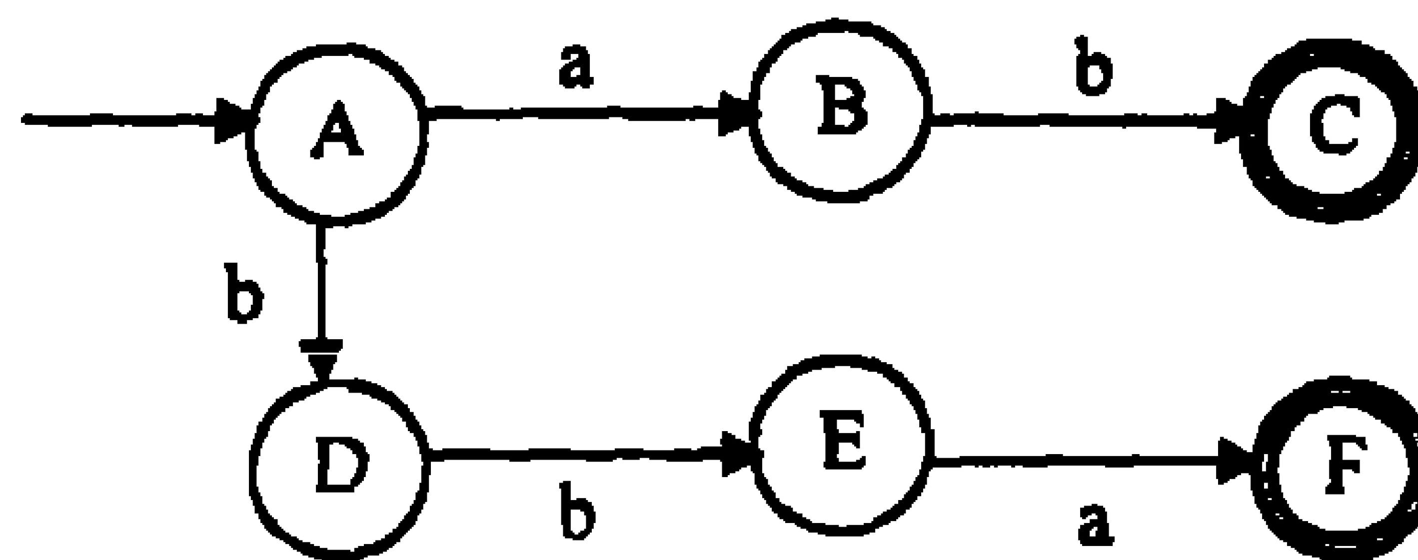
كمثال آخر على مسألة المسارين المتفاعلين سنصمم آلة تقبل كلمات تحتوي على المقطع abb أو المقطع baa. التفاعل سيتم بحيث أن الكلمة babb تصبح مقبولة ولكـــن نقفز من المسار السفلي إلى العلوي بعد خطوتين (حين يحدث الخطأ). وسنقفز مــــن المسار العلوي إلى السفلي بعد خطوتين لكي تصبح الكلمة abaa كلمة مقبولـــة. أي، نرسم بشكل مبدئي الآلة كالتالي:



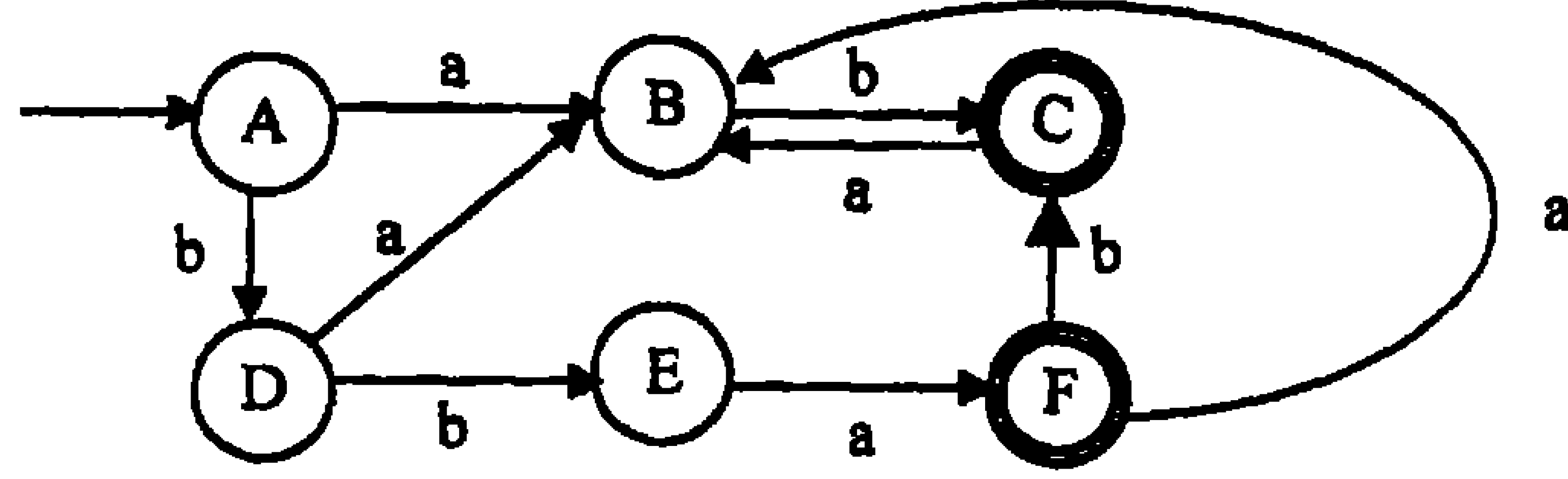
بقية الأسهم ترسم بشكل اعتيادي كما فعلنا في مثل هذه الحالات لكل مسار على حدة. أي الآلة تكون



سنطلب الآن أن تقبل الآلة كلمات نهايتها إما ab أو bba. كما تعودنا نرسم لكل مقطع مسار منفصل داخل الآلة:



بالنسبة للمسار العلوي نذكر أن تعديل كلمة مرفوضة إلى كلمة مقبولة يستوجب أن ينطلق سهم من C إلى B حاملا الحرف a. بهذه الطريقة نحصل على مسار جديد للمقطع ab وهو من C إلى B ثم C بدل المسار الأصلي من A إلى B ثم C. بذلك نضمن أن تتعدل الكلمة aba إلى abab وتصبح مقبولة دون مشاكل. سنقوم الآن بالتفكير في المسارات الثانوية المحتملة داخل الآلة للمقطع ab سوى المسار من C إلى B ثم C. أول مسار محتمل هو من E إلى F ثم C. لاحظ أن النهاية كما سبق هي الحالة C ولكن الانطلاق كان من المسار السفلي. ثاني مسار محتمل هو من D إلى B ثم C. ثالثا مسار محتمل هو من F إلى B ثم C. نحصل بذلك على التصميم التالي:



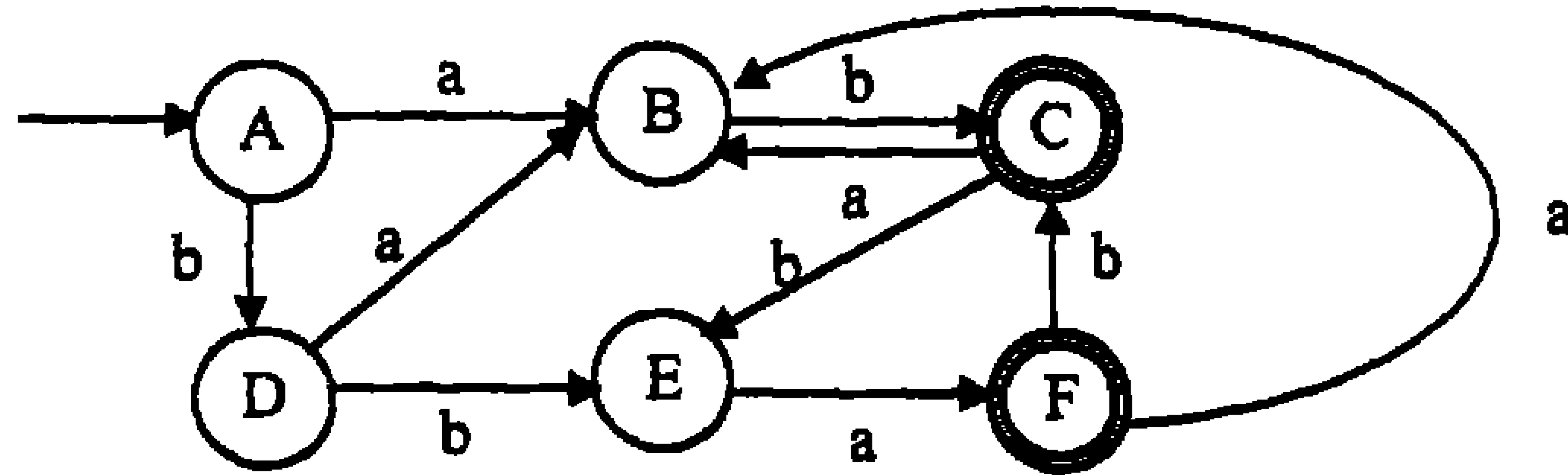
نلاحظ أن الحالات التي ينقصها أسهم هي كالتالي:

أ- B ينقصها سهم حرف a.

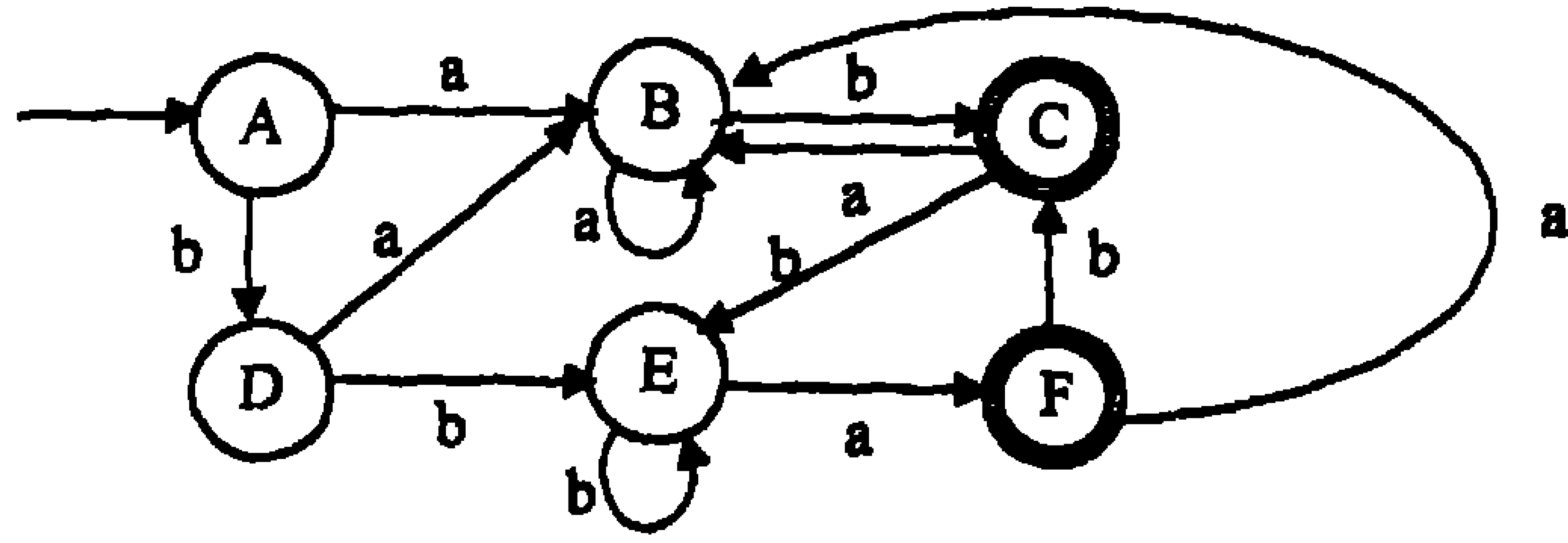
ب- C ينقصها سهم حرف b.

ج- E ينقصها سهم حرف b.

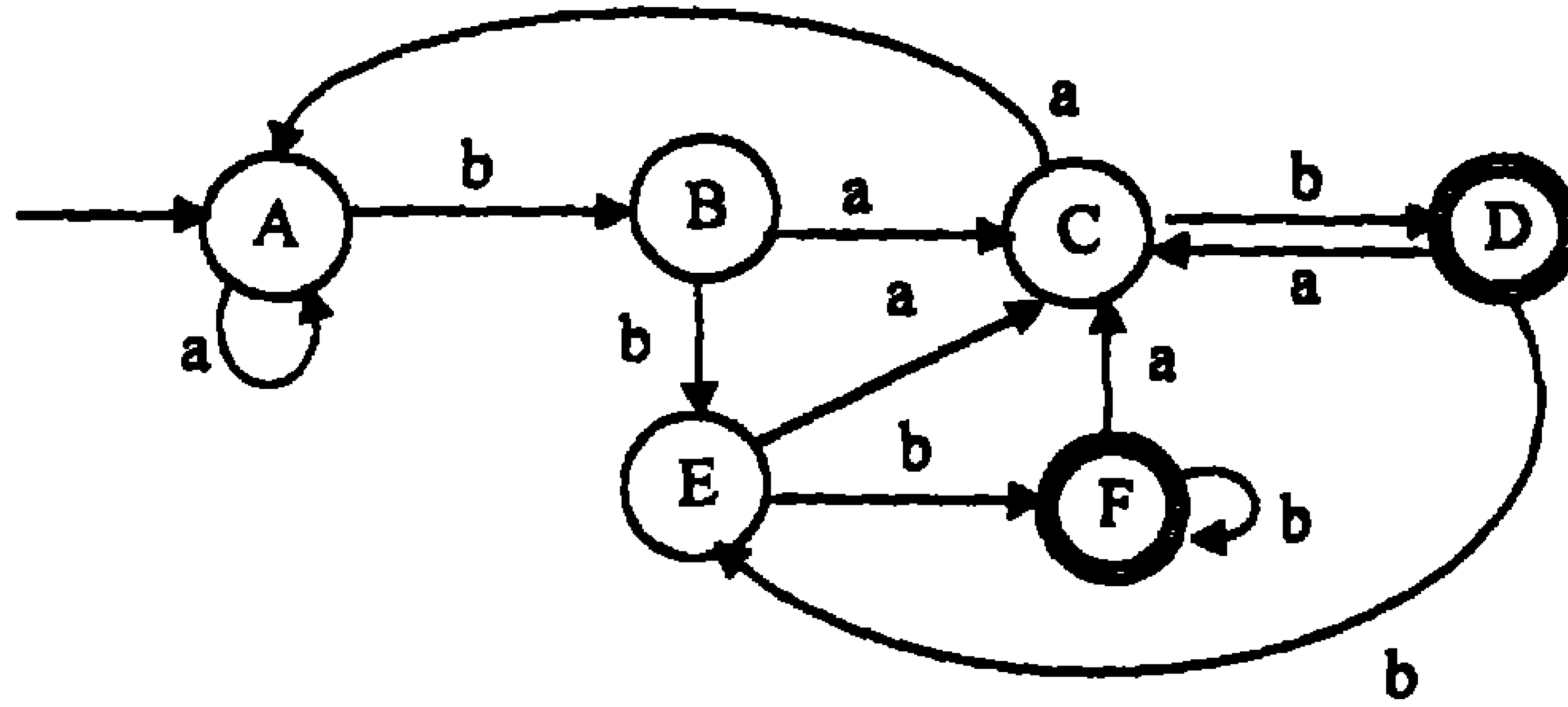
بالنسبة لعلاج المشكلة ب يمكن خلق مسار ثانوي للمقطع bba على أنه المسار من B إلى C ثم E وأخيرا F. بذلك تنتج الآلة:



أما أبسط حل للمشكلة أ و جـ فيكمن في رسم الأسهم الانعكاسية. أي نخلق مسار من B إلى B ثم C يمثل المقطع ab ونخلق مسار من D إلى E ثم E وأخيرا F يمثل المقطع bba. هذا الحل هو في الوقت نفسه الحل المطلوب لأنه يعالج حدوث خطأ في تكوين كلمة مقبولة في الحال. مثلا، هذا الحل سيجعل الآلة تقبل الكلمات bbba و aab. يمكن للطالب أن يراجع هذا باستخدام الآلة الجاهزة التالية حيث تقبل أيضا الكلمات bab و bbab و abba و bbaab:

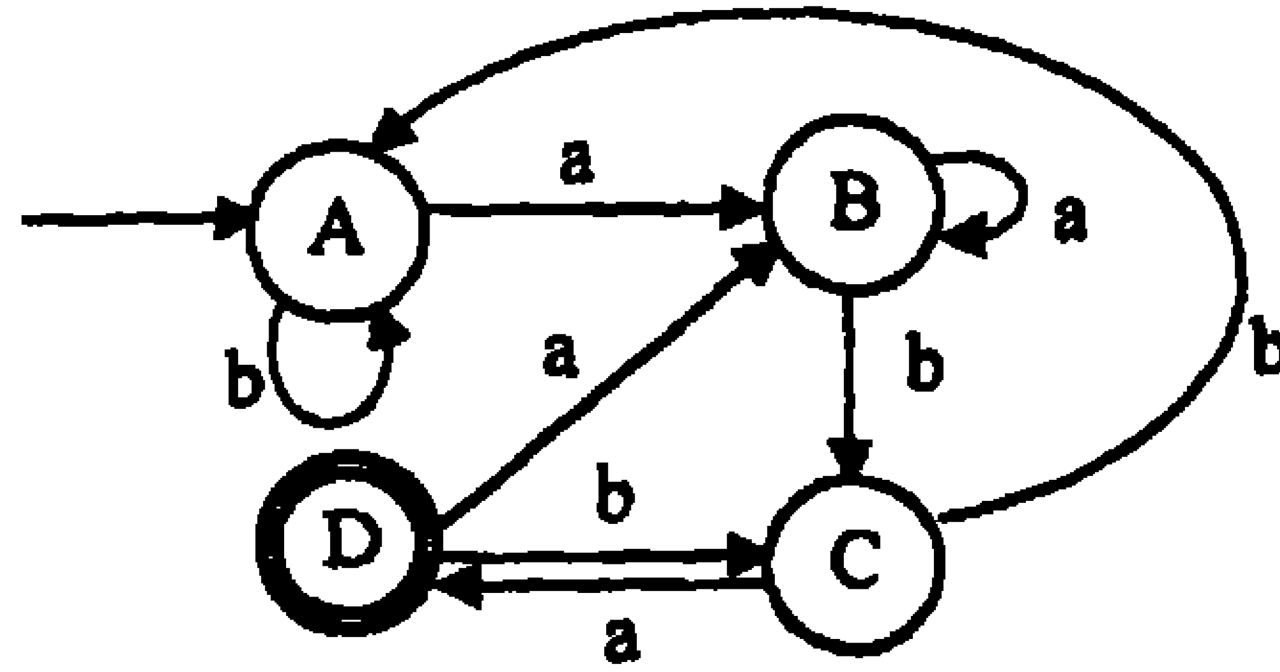


كمثال آخر على النوع الأخير من الآلات سننظر إلى الآلة التالية:

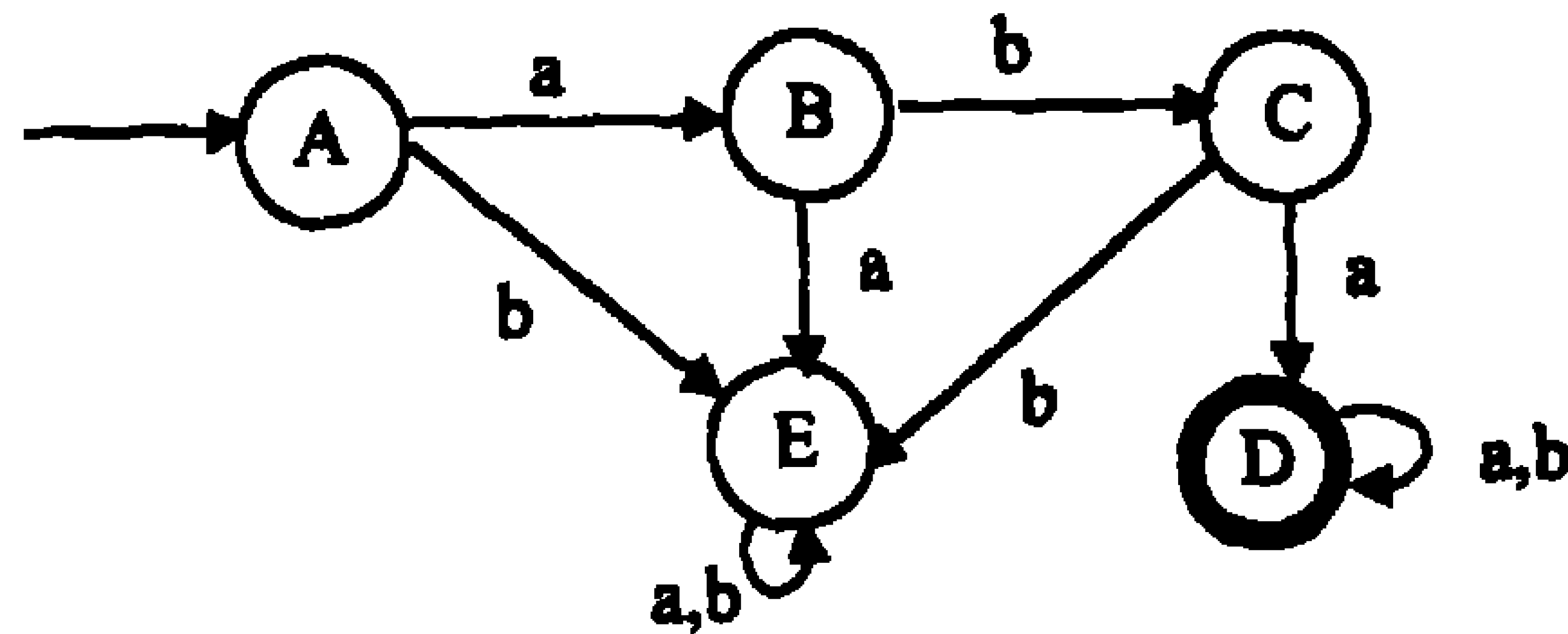


هذه الآلة تقبل كلمات نهايتها إما bab أو bbb. ولتعميق الفهم سنعطي الأمثلة المختصرة التالية:

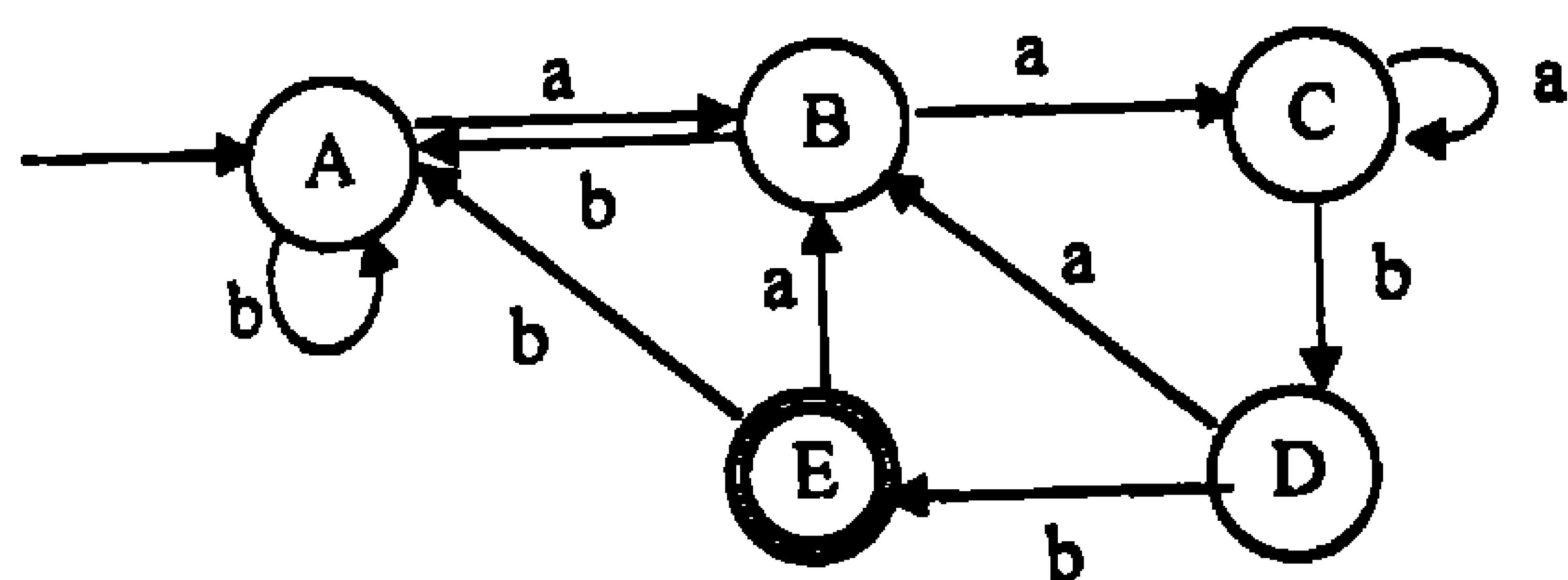
١- آلة تقبل كلمات تنتهي بالمقطع aba



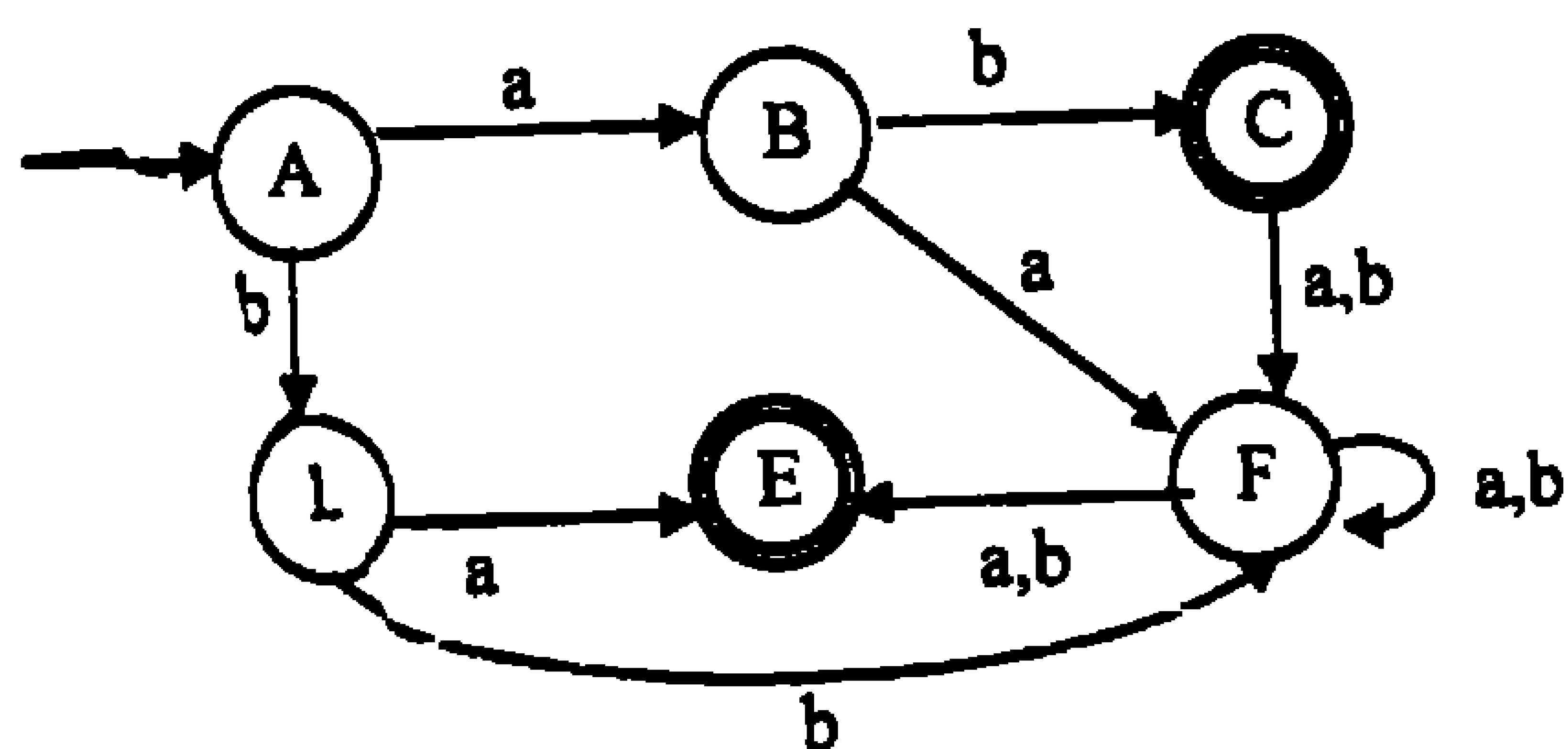
٢- آلة تقبل كلمات بدايتها المقطع aba



٣- آلة تقبل كلمات نهايتها aabb



٤- آلة تتعرف على الكلمة ab أو ba



المصادر

References

1- Discrete Mathematical Structure, Colman, Busby, Ross, Prentice hall 3rd edition.

2- Discrete Mathematics, R. Johnsonbaugh, Prentice hall 3rd edition.

3- Discrete Mathematics in Computer Science, D. Stant, D. Mcllister, Prentice hall 1977.

4- The Elements of longic, S. Baker, McGraw-Hill 2nd edition 1984.

5- Theory of Finite Automata, J. Caroll, D. Long, Prentice hall 1989.

6- Discrete Mathematics, Dosage, Otto, Spence, Vanden Eynden, 1987.

7- Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, Addison-Wesley 1988.

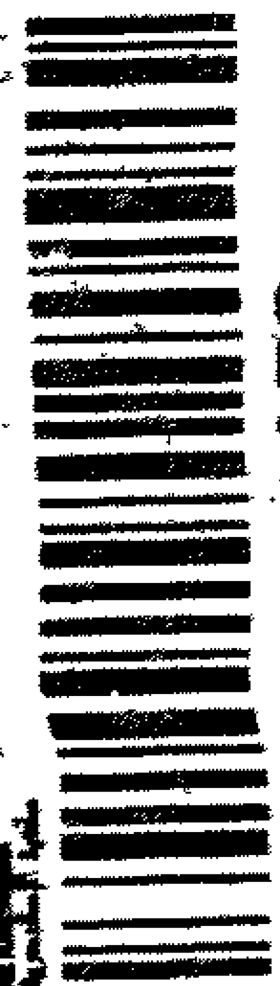
8- Introduction to Automata Theory, Languages and Computation, Addison Wesley 1979.

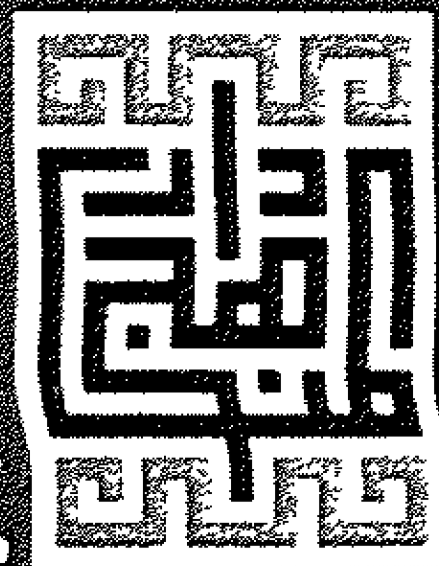
9- Essential Discrete Mathematics, R. Johnsonbaugh, Mucmillan 1987.

10- Elements of discrete Mathematics, C. Liu, McGraw Hill 1989.

11- Introduction to Graph theory, R. Wilson Academic Press 1979.

مدخل إلى
الرياضيات المنفصلة





دار المناهج
للنشر والتوزيع

عمان - تلفاكس: ٤٦٥٠٦٢٤
ص.ب ٢١٥٣٠٨ عمان ١١١٢٢ الاردن